УДК 378.147 + 372.851

Использование средств интерактивного обучения при построении кривых второго порядка

А. И. Литвинов

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Показано, что в процессе освоения элементарной и аналитической геометрии должны учитываться особенности этих областей знаний: рассуждения с применением первичных понятий — аксиом, теорем и их следствий — сопровождаются аналитическими выражениями — известными формулами и уравнениями, — а также зрительными образами-рисунками, или эскизами. Автор утверждает, что, используя особенности геометрии, процесс интерактивного обучения этой науке можно сделать особенно эффективным: ускорить развитие интеллектуальных способностей обучаемого.

Ключевые слова: интерактивное обучение; элементарная геометрия; аналитическая геометрия; кривые второго порядка.

При изучении геометрии процесс интерактивного обучения приобретает дополнительный инструмент привлечения внимания слушателей и побуждения их к активному участию. Это зрительные образы в виде рисунков и чертежей. Можно рисовать не только на листе бумаги или на доске в аудитории, но и на ровном песчаном участке, как любили геометры в древности.

Рассмотрим кривые второго порядка. Их общая форма записи:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Если обратить внимание, что в записанном уравнении скрыты линии окружности, эллипса, гиперболы и параболы, это заметно оживит интерес аудитории к предмету. Если линии кривых рисовать на песке, не имея соответствующих уравнений, интерес перейдет в любопытство.

Начнем с окружности. Для вычерчивания с помощью циркуля не требуется знать определение окружности. Это *инструментальная* модель окружности. Затем, когда учащийся освоил прямоугольную систему координат OXY и теорему Пифагора, он легко превращает определение окружности радиуса $R = a$ с центром в точке $C(x_0,y_0)$ в соответствующее уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

Это *аналитическая* модель окружности.

Поставим вопрос: как нарисовать окружность на ровном песчаном участке? Ответ аудитории: отметим произвольную точку C и забьем в ней колышек. Наденем на колышек петлю, завязанную на конце веревки C. Далее отмерим на веревке длину радиуса $R = CM$, в точке M завяжем петлю и вставим в нее стержень. При движении вокруг точки C, следя за натяжением, вычертим на песке линию-окружность (рис. 1).

Если центром считать точку O, уравнение окружности примет самый простой вид:

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

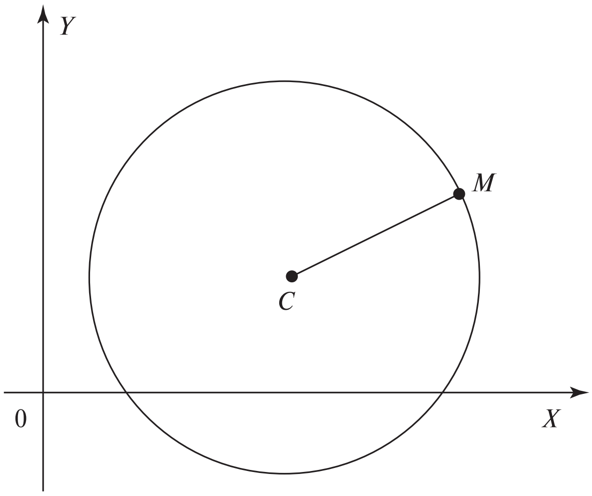

Рис. 1. Окружность

Строим инструментальную модель эллипса: забиваем два колышка на расстоянии $2c$ друг от друга, причем сразу указываем их координаты в системе координат OXY (показано на рисунке 2): левый колышек $F_1(-c,0)$, правый $F_2(c,0)$. Начало координат, точка O, располагается между колышками F_1 и F_2. Забиваем третий колышек O, берем шнур длиною $2a$, такой, чтобы $2c < 2a$, и закрепляем его концы на колышках F_1, F_2. При помощи металлического стержня M растягиваем шнур на полную длину: $F_1M + F_2M = 2a$. Удерживая стержень M в вертикальном положении, при постоянно натянутом шнуре концом стержня вычерчиваем на песке линию.

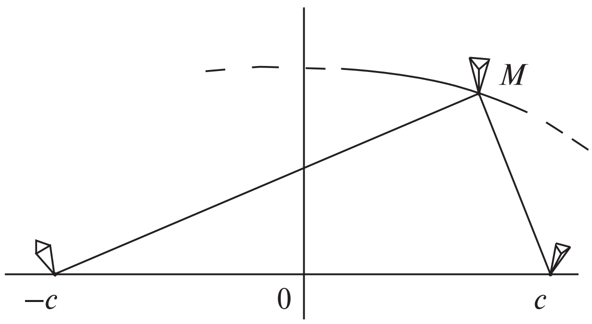

Рис. 2. Построение инструментальной модели эллипса

Инструментальная модель эллипса построена. Определяющее ее геометрическое свойство: для каждой точки M выполняется условие $F_1M + F_2M = 2a$. Отметим точки, в которых линия эллипса пересекает ось координат OY: точки $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$, где

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ (по Пифагору).}$$

Если колышки F_1 и F_2 забить в точке O, эллипс превратится в окружность радиуса $R = a$ — предельное состояние эллипса.

Учтем, что при значении переменной $x = 0$ у эллипса выполняется равенство $y^2 = b^2$. Поскольку предельное состояние эллипса при условии $F_1 = F_2 = 0$ — это окружность радиуса $R = a$, нетрудно догадаться, что каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это *аналитическая* модель эллипса.

Отметим, что окружность была определена в элементарной геометрии. Однако термин «эллипс» не встречался ни в геометрии, ни в алгебре школьной программы. А зрительный образ эллипса наблюдаем с юного возраста: это окружность, на которую смотрят под некоторым углом.

В элементарной алгебре термин «гипербола» не раскрывает геометрические свойства точек гиперболы. Наша задача: определить гиперболу как геометрическое место точек, обладающих некоторым групповым свойством.

Итак, знакомство с определением окружности подсказывало геометрическое свойство точек эллипса. Естественно ожидать, что определение эллипса подскажет геометрическое свойство точек гиперболы.

Аудитория предлагает импровизацию свойств точек линий. Для эллипса условие $F_1M + F_2M = 2a$ использует сумму расстояний. Применим разность расстояний $F_1M - F_2M = 2a$ для определения свойств точек.

При условии $F_1M - F_2M = 2a$ легко получаем *инструментальную* модель линии с заданными свойствами.

Возможны два случая: а) расстояние от точки M до точки F_2 меньше, чем от M до F_1: $r_1 - r_2 = 2a$; б) расстояние от точки M до точки F_1 меньше, чем от M до F_2: $r_2 - r_1 = 2a$. На рисунке 3 показана реализация инструментальной модели на песке (а).

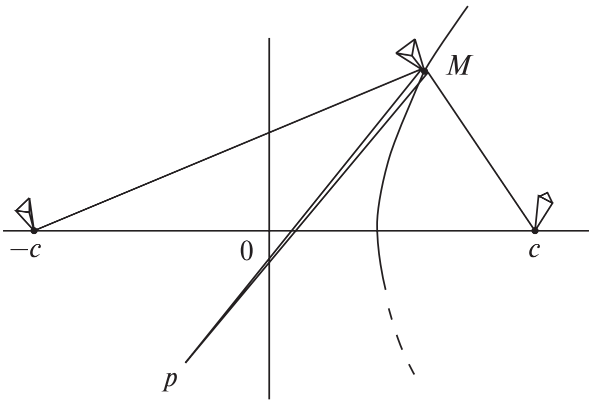

Рис. 3. Построение инструментальной модели гиперболы

При постоянном натяжении всех участков шнура, с помощью штыря M рисуем на песке линию, которую назвали гиперболой, — правая ветвь. Аналогично рисуем левую ветвь гиперболы. Получаем *аналитическую* модель гиперболы. Заданные геометрические свойства точек легко превращаем в уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При изучении элементарной алгебры в школе геометрическое свойство точек параболы остается неизвестным. Находим его наглядно простым способом: расстояния от точки M до фиксированной точки $F(p/2,0)$ и до прямой $(-p/2,0)$ равны. Строим соответствующие модели — инструментальную и аналитическую. Уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Подведем итог творческой работы аудитории по построению кривых линий второго порядка.

Интерактивные методы могут быть эффективными инструментами в преподавании любого предмета. Они существенно помогают систематизировать взаимодействие частных сведений изучаемой науки и других смежных наук. А главное: коллективный труд учащихся становится радостным, творческим, побуждает к сотрудничеству.

Литература

1. ***Кумарин В. В.*** Теория коллектива в трудах А. С. Макаренко. Киев: Вища школа, 1979. 121 с.
2. ***Макаренко А. С.*** Воспитание гражданина: [Сб. / Сост. Р. М. Бескина, М. Д. Виноградова]. М.: Просвещение, 1988. 301 с.
3. ***Метлина Л. С.*** Математика в детском саду. 2-е изд., перераб. М.: Просвещение, 1984. 256 с.: ил.
4. ***Павлова М. П.*** Педагогическая система А. С. Макаренко и современность. М.: Высшая школа, 1980. 287 с.: ил. (Профпедагогика).
5. ***Сухомлинский В. А.*** Об умственном воспитании / Сост. М. И. Мухин. Киев: Радянська школа, 1983. 224 с.: портр. (Педагогическая б-ка).

Литвинов Александр Иванович — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры высшей математики № 2 (ВМ-2) МИЭТ.
E-mail: tahalus@rambler.ru