УДК 519.872.1

Исследование загруженности транспортной компании с помощью многоканальной системы обслуживания: тезисы доклада

И. Г. Завьялова, Н. Гайдаржи, В. Карабаджак, В. В. Мишкова

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Россия

n.gaydarji@mail.ru

Study of the Transportation Company Load by Means of Multiserver Queueing Systems

I. G. Zavialova, N. Gaydarji, V. Karabadjak, V. V. Mishkova

National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia

n.gaydarji@mail.ru

The authors did use Erlang equations for multiserver queueing systems to calculate the probabilty of vehicle down time and service denial for a transportation company.

Keywords: queueing systems; Erlang equations; service denial probability.

Постановка задачи: в Зеленограде открылась новая компания такси «Альфа», диспетчер компании получает в среднем 35 вызовов в час. Среднее время обслуживания одного вызова по городу составляет 30 минут. Требуется найти оптимальное количество автомобилей с точки зрения загруженности системы.

В качестве математической модели, которая описывает функционирование компании, используем многоканальную систему обслуживания [1, с. 515]. Каналы — это автомобили. Поступивший вызов может обслуживаться на любом свободном автомобиле. Если все каналы заняты, вызов теряется (клиент звонит в другую компанию). Поэтому будем рассматривать многоканальную систему обслуживания с отказами [1, с. 540].

Поток вызовов диспетчеру (входящий поток) является пуассоновским [2, с. 24—25], поскольку он обладает следующими свойствами:

– *ординарностью* (вызовы поступают в систему по одному);

– *стационарностью* (распределение случайной величины Z, равной интервалу между соседними вызовами, не меняется с течением времени); если это свойство не выполнено, период функционирования системы можно разбить на интервалы времени, внутри которых свойство выполняется;

– *отсутствием последействия* (количество вызовов, поступивших в систему до определенного момента времени, не сказывается на количестве вызовов, поступивших после этого момента).

Перечисленных свойств в совокупности достаточно для того, чтобы входящий поток являлся пуассоновским [2, с. 25].

Распределение интервалов Z между событиями пуассоновского потока определяется формулой: $Z \sim 1\text{-}e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$, где λ — интенсивность входящего потока.

На любом канале распределение времени обслуживания одного вызова β является показательным: $\beta \sim 1\text{-}e^{-\mu t}$, $t \geqslant 0$; где μ — интенсивность выходящего потока на одном канале.

Выходящий поток — это поток вызовов, покидающих систему (поток обслуженных вызовов). Его свойства аналогичны свойствам входящего потока, то есть он тоже является пуассоновским. Интенсивность выходящего потока $\mu = 1/\beta_1$, где β_1 — среднее время обслуживания одного вызова [2, с. 45].

Обозначим через $\alpha = \lambda/\mu$ среднее число вызовов, приходящееся на среднее время обслуживания одного вызова, т. е. $\alpha = \lambda\beta_1$.

В системах с очередями для того, чтобы вызовы успевали обслуживаться, чтобы не накапливалась неограниченная очередь, должно соблюдаться условие стационарного режима работы $\alpha < n$, где n — число каналов обслуживания. Поэтому оптимальное количество автомобилей в нашей системе (в системе с отказами) должно находиться в окрестности $\alpha = \lambda\beta_1 = 35 \cdot 0{,}5 = 17{,}5$.

Пусть состояния нашей системы — это количество занятых каналов (k), $0 \leqslant k \leqslant n$. Они образуют Марковский процесс, для которого вероятности состояний в момент времени $(t + dt)$ – $p_k(t + dt)$, где $0 \leqslant k \leqslant n$, определяются через вероятности состояний системы в момент времени t – $p_k(t)$, где $0 \leqslant k \leqslant n$ [1, с. 542].

Для многоканальной системы с отказами эти вероятности удовлетворяют дифференциальным уравнениям Эрланга [1, с. 543]:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) p_k(t) + {}$$
$$+ (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad (0 < k < n),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t).$$

Поскольку мы рассматриваем систему с отказами, при любом α возможно существование стационарного режима работы. В стационарном режиме вероятности состояний являются константами, т. е. не меняются с течением времени (обозначим их p_k, $0 \leqslant k \leqslant n$), и левые части в уравнениях Эрланга равняются нулю.

Система дифференциальных уравнений Эрланга в стационарном режиме преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений [1, с. 545]:

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1,$$
$$0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1},$$
$$(0 < k < n),\ 0 = \lambda p_{n-1} - n\,\mu p_n.$$

Из этих рекуррентных соотношений последовательно определяются вероятности $p_k = \dfrac{a^k}{k!} p_0\ (1 \leqslant k \leqslant n)$.

А поскольку $\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} = 1$, то $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}}$.

Значение p_0 совпадает со средней долей времени простоя автомобилей.

При подстановке p_0 в формулу $p_k = \frac{a^k}{k!} p_0$ окончательно получаются вероятности состояний системы

$$p_k = \frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}}, (0 \leqslant k \leqslant n). \qquad (1)$$

Эта формула задает закон распределения числа занятых каналов в зависимости от интенсивности входящего потока и производительности системы обслуживания.

Полагая в формуле (1) $k = n$, получим вероятность отказа (вероятность того, что поступивший вызов найдет все каналы занятыми):

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\frac{a^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}}.$$

Значение этой вероятности совпадает с долей вызовов, которым было отказано в обслуживании, в общем количестве заявок.

Посчитаем вероятности p_0 и $P_{\text{отк}}$ в случае $n = 15$ и $n = 20$.

Количество автомобилей	Доля времени простоя автомобилей в рабочем времени	Доля вызовов, которым отказано в обслуживании, в общем количестве заявок
15	0,8 %	2,5 %
20	4,7 %	0,15 %

Данные таблицы позволяют руководителю сделать вывод, сколько автомобилей компании иметь выгоднее. При необходимости аналогичная таблица легко составляется и для другого количества автомобилей, а также по формулам (1) проводится более детальный анализ — рассчитываются вероятности частичных загруженностей системы.

Сведение реальных систем к многоканальным системам обслуживания во многих случаях является естественным, позволяет проводить простые и эффективные исследования и, в конечном итоге, существенно улучшать показатели работы компаний.

Литература

1. ***Вентцель Е. С.*** Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

2. ***Завьялова И. Г.*** Методы вероятностного моделирования. М.: МИЭТ, 2013. 48 с.

Завьялова Ирина Геннадьевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 2 Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д. 1), *irinazavialova@gmail.com*

Гайдаржи Надежда — студентка группы ЭУ-34 Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д. 1), *n.gaydarji@mail.ru*

Карабаджак Вадим — студент группы ЭУ-34 Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д. 1), *karabadjak.vadik@yandex.ru*

Мишкова Виктория Викторовна — студентка группы ЭУ-34 Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д. 1), *vika.mishkova.97@mail.ru*

References

1. Venttsel' E. S. Teoriya veroyatnostei (Theory of Chances), M., Nauka, 1969, 576 p.

2. Zav'yalova I. G. Metody veroyatnostnogo modelirovaniya (Methods of Probabilistic Modeling), M., MIET, 2013, 48 p.

Zavialova Irina G., Candidate of Sciences (physical and mathematical), assistant professor at the Department of Higher Mathematics No. 2, National Research University of Electronic Technology (Shokin Square, 1, 124498, Moscow, Zelenograd, Russia), *irinazavialova@gmail.com*

Gaydarji Nadejda, student of EU-34 group, National Research University of Electronic Technology (Shokin Square, 1, 124498, Moscow, Zelenograd, Russia), *n.gaydarji@mail.ru*

Karabadjak Vadim, student of EU-34 group, National Research University of Electronic Technology (Shokin Square, 1, 124498, Moscow, Zelenograd, Russia), *karabadjak.vadik@yandex.ru*

Mishkova Viktoria V., student of EU-34 group, National Research University of Electronic Technology (Shokin Square, 1, 124498, Moscow, Zelenograd, Russia), *vika.mishkova.97@mail.ru*