УДК 519.95:378.14

Кватернионы и октавы

А. В. Клюшин

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Автор анализирует изложение темы «Кватернионы и октавы» в курсе дискретной математики и обосновывает важность этих понятий для современного мировоззрения. Краткое описание истории открытия кватернионов и октав и методическое разъяснение определений и свойств кватернионов, октав и связанных с ними понятий дает возможность автору обсудить технику поворота пространства с помощью кватернионов. Доказывается формула для октав о том, что модуль произведения равен произведению модулей. Приводятся теоремы, подчеркивающие уникальность кватернионов и октав в классе всех алгебр над полем действительных чисел.

Ключевые слова: кватернионы; октавы; дискретная математика.

Понятие «кватернионы» нечасто употребляется в курсах дискретной математики для студентов вузов и в курсах математики вообще. Между тем наличие таких числовых систем, как кватернионы и октавы, имеет большое значение для формирования современного естественно-научного мировоззрения. Без открытия кватернионов в 1843 г. было бы невозможным создание четырехмерного пространства-времени Минковского. С помощью кватернионов можно более просто и естественно изложить многие эффекты общей и специальной теории относительности [1], сформулировать законы классической электродинамики и квантовой механики [2]. Особенную важность сегодня приобретает вопрос о размерности нашего мира. Попытки создания единой теории поля приводят к необходимости рассматривать пространства большего числа измерений в сравнении с трехмерным физическим миром. Модели пяти- и шестимерного пространства предложены Т. Калуцей и О. Клейном вскоре после опубликования эпохальных статей А. Эйнштейна. Затем исследовались различные варианты размерностей, вплоть до 10-мерной, но наибольшее распространение в данный момент получили модели, рассматривающие восьмимерное пространство. И здесь важную роль играют октавы. Использование октав в построении различных моделей рассматривается, например, в работах Е. И. Кубышкина [3; 4].

Давно известно, что с помощью комплексных чисел легко осуществлять поворот плоскости. Поворот на угол φ выполняется умножением на комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Например, чтобы повернуть точку $A(2;1)$ на плоскости на угол 30°, достаточно умножить два комплексных числа

$$(2+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

Значит, точка A перешла в точку

$$A'\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2};1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Хотелось бы иметь такой же простой механизм для пространства. Этой задачей заинтересовался У. Гамильтон. В 1835 г., в возрасте 30 лет, он научился работать с комплексными числами как с парами действительных чисел. Вдохновленный этой связью между $\mathbb{C}$ и двумерной геометрией, он в течение многих лет пытался изобрести большую алгебру, которая играла бы аналогичную роль в трехмерной геометрии. 16 октября 1843 г., направляясь с женой вдоль Королевского канала на заседание Королевской ирландской академии в Дублине, он совершил свое эпохальное открытие: «Можно сказать, я здесь и сейчас почувствовал, как электрическая цепь мысли замкнулась, а засверкавшие искры оказались фундаментальными соотношениями

$$\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1,}$$

представленными именно в том виде, в каком я их с тех пор использовал» [5, с. 4].

Вскоре после этого Дж. Т. Грейвз, товарищ Гамильтона по колледжу, открыл еще одну уникальную алгебру — алгебру октав, восьмимерную алгебру над полем действительных чисел. История открытия кватернионов и октав хорошо изложена у Дж. Х. Конвея и Д. А. Смита [6].

Кватернионы — это выражения вида $\omega = a + bi + cj + dk$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Их можно интерпретировать как четырехмерные векторы над $\mathbb{R}$. Множество кватернионов обозначается H в честь Гамильтона. Символы ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ образуют группу, которая называется группой кватернионов и обозначается Q_8. Умножение в этой группе определяется следующим образом: умножение на ± 1 обычное. Символы i, j, k перемножаются по следующим правилам: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$.

Для кватернионов, так же как и для комплексных чисел, имеется операция сопряжения. Если дан кватернион $\omega = a + bi + cj + dk$, то сопряженным к нему называется кватернион $\overline{\omega} = a - bi - cj - dk$.

Непосредственно проверяется, что $\omega \cdot \overline{\omega} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Это действительное число. В основе алгебры комплексных чисел лежит равенство

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$

благодаря чему $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Произведение чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, также представимо в виде суммы двух квадратов. Аналогичное равенство справедливо и для четырех квадратов. Известна теорема Гурвица о том, что подобные равенства справедливы для числа квадратов $n = 1, 2, 4, 8$, и только для них! Благодаря этому, для кватернионов также справедливо равенство

$$|\omega_1 \cdot \omega_2| = |\omega_1| \cdot |\omega_2|.$$

Техника поворота пространства с помощью кватернионов состоит в следующем: для того чтобы повернуть вектор x на угол 2φ вокруг оси, задаваемой вектором u, нужно сначала нормировать вектор u: $\nu = u/|u|$, сформировать кватернион $\omega = \cos\varphi + \nu \sin\varphi$ и осуществить преобразование $x \to \omega^{-1} x \omega$.

Для построения алгебры октав можно рассмотреть выражения вида $\omega_1 + \omega_2 e$, где e — новый символ. Сложение и умножение на действительное число a определяется обычным образом.

Умножение в алгебре октав задается равенством

$$(\omega_1 + \omega_2 e)(\omega_3 + \omega_4 e) = \\ = (\omega_1\omega_3 - \overline{\omega}_4\omega_2) + (\omega_4\omega_1 + \omega_2\overline{\omega}_3)e.$$

Закон дистрибутивности выполняется, однако умножение не только не коммутативно, но и не ассоциативно.

Значимость алгебры кватернионов и октав подчеркивается **теоремой Фробениуса** [7]: *тело кватернионов является единственной конечномерной,* *действительной, ассоциативной, но не коммутативной алгеброй без делителей нуля.*

Алгебра октав является единственной конечномерной, действительной, альтернативной, но не ассоциативной алгеброй без делителей нуля.

Литература

1. ***Сазанов А. А.*** Четырехмерный мир Минковского. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 224 с.: ил. (Проблемы науки и технического прогресса).
2. ***Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.*** Кватернионы в релятивистской физике. 2-е изд., испр. М.: Едиториал УРСС, 2003. 198 с.: ил.
3. ***Кубышкин Е. И.*** Нелинейная алгебра пространства-времени. М.: URSS: Либроком, 2009. 301 с.: ил. (Relata refero).
4. ***Кубышкин Е. И.*** Октавы и наш восьмимерный мир: модель пространства-времени на основе алгебры октав. М.: URSS: Либроком, 2013. 255 с.: ил. (Relata refero).
5. ***Гордеев В. Н.*** Кватернионы и трехмерная геометрия. Электрон. дан. Киев, 2012. 60 с. // Техническая библиотека [Электронный ресурс]. URL: http://techlibrary.ru/b/2k1p1r1e1f1f1c_2j.2v._2s1c1a1t1f1r1o1j1p1o2c_1j_1t1r1f1w1n1f1r1o1a2g_1d1f1p1n1f1t1r1j2g._2012.pdf (дата обращения: 06.05.2016).
6. ***Конвей Дж. Х., Смит Д. А.*** О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. М.: Изд-во МЦНМО, 2009. 183 с.: ил.
7. ***Курош А. Г.*** Лекции по общей алгебре. 2-е изд. М.: Наука: Физматлит, 1973. 399 с.

Клюшин Александр Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 2 (ВМ-2) МИЭТ. **E-mail: AVKlyushin@mail.ru**