УДК 519.863 DOI: 10.24151/2409-1073-2020-1-14-18

# Оптимизация производства путем решения задачи минимизации издержек

*И.В. Бардушкина[1], П.В. Ермилова[1]*

[1]*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

*i_v_bars@mail.ru*

Решена двухэтапная задача оптимизации производства в зависимости от затрачиваемого капитала и труда. На первом этапе по статистическим данным методами аппроксимации определены параметры производственной функции. На втором этапе решена задача минимизации издержек при фиксированном объеме производства. Для рассматриваемого диапазона значений объема производства построена линия долгосрочного развития предприятия.

***Ключевые слова***: оптимизация; производственная функция; аппроксимация; условный экстремум.

# Optimization of production by solving the problem of minimizing costs

*I.V. Bardushkina[1], P.V. Ermilova[1]*

[1]*National Research University of Electronic Technology "MIET"*

*i_v_bars@mail.ru*

Author has solved the two-stage problem of optimizing the production depending on the capital and labor. At the first stage, according to the statistical data, the parameters of the production function are determined by the approximation methods. At the second stage, the task of minimizing costs at a fixed volume of production is solved. Author has built the line of long-term enterprise development for the considered range of production volume values.

***Key words***: optimization; production function; approximation; conditional extremum.

Производство в экономике понимается как деятельность, в ходе которой экономические ресурсы посредством труда преобразуются в готовую продукцию. Производственная функция (ПФ) отображает связь между фактическим объемом выпуска и ресурсами, затраченными в процессе производства товаров или услуг. На макроэкономическом уровне ПФ используется для построения зависимости валового выпуска от производственных фондов и рабочей силы — как для регионов [1], так и для страны в целом. На микроэкономическом уровне в роли производственной системы может выступать отдельное предприятие или отрасль [2]. Экономисты выделяют два вида наиболее часто используемых производственных функций: однофакторная и двухфакторная; к последним относится, например, функция Кобба — Дугласа [3]. Впервые зависимость была предложена шведским экономистом Кнутом Векселлем, однако статистическую проверку в 1927—1947 гг. осуществили ученые Чарльз Кобб и Пол Дуглас, в честь которых функция и получила свое название. Ученые предприняли попытку опытным путем

определить зависимость объема выпускаемой продукции от затрачиваемого капитала и труда в обрабатывающей промышленности США. Факторами производства в рассматриваемой модели являются труд и капитал. Определенная пропорциональность их сочетания создает условия для получения продукта. Назначение производственной функции Кобба — Дугласа заключается в отражении технологического соотношения труда и капитала, необходимого для производства некоторого количества товара.

***Нахождение параметров производственной функции.*** Существуют различные подходы в построении ПФ для описания реальных процессов [4]. Применим метод наименьших квадратов и минимизацию функции двух переменных для аппроксимации ПФ [5].

Рассмотрим функцию Кобба — Дугласа, определяющую зависимость объема производства $Q$ от двух производственных факторов: труд $L$ и капитал $K$ [6, 7]. Для проведения количественных экономических расчетов зависимость необходимо взять в виде:

$$Q = Q_0 \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\beta}, \qquad (1)$$

где $L_0$ и $K_0$— фиксированные значения аргументов $L$ и $K$; $Q_0$ — соответствующий им объем производства.

Пусть имеются экспериментальные данные, показывающие объем $Q_{ij}$ стабильно функционирующего производства при некоторых значениях производственных факторов $L_j$ (человеко-часов), $K_j$ (тыс. ден. ед.).

| L | K | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 8 | 16 | 24 | 30 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | 9 | 14 | 17 | 19 | 20 |
| 9 | 11 | 16 | 20 | 22 | 24 |
| 12 | 14 | 20 | 25 | 28 | 29 |
| 15 | 16 | 24 | 29 | 32 | 34 |

Обозначим $U = \dfrac{L}{L_0}$, $V = \dfrac{K}{K_0}$, $W = \dfrac{Q}{Q_0}$.

Тогда, $\ln W = \alpha \ln U + \beta \ln V$. Обозначим $w = \ln W$, $u = \ln U$, $v = \ln V$, тогда $w = u\alpha + v\beta$. Для имеющихся значений получим приближенные равенства $w_{ij} = u_i\alpha + v_j\beta$.

Важно заметить, что задача состоит в нахождении таких значений α и β, при которых сумма квадратов разностей между левой и правой частью каждого равенства была бы минимальной:

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} \left(u_i\alpha + v_j\beta - w_{ij}\right)^2 \to \min.$$

Раскроем квадрат линейной комбинации в выражении для целевой функции:

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} \Big(u_i^2\alpha^2 + 2u_i v_j \alpha\beta + v_j^2\beta^2 - 2u_i w_{ij}\alpha - 2v_j w_{ij}\beta + w_{ij}^2\Big).$$

Введем обозначения: $a = \sum_{i,j} u_i^2$,

$b = 2\sum_{i,j} u_i v_j$, $c = \sum_{i,j} v_j^2$, $d = -2\sum_{i,j} u_i w_{ij}$,

$e = -2\sum_{i,j} v_j w_{ij}$, $f_0 = \sum_{i,j} w_{ij}^2$, тогда

$$f(\alpha, \beta) = a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f_0. \qquad (2)$$

Функция выпукла в области $4ac - b^2 > 0$, это необходимое условие, чтобы привлечь градиентные методы нахождения экстремума.

Выберем средние значения переменных в качестве констант: $L_0$=9,2, $K_0$=16, $Q_0$=18,6. Вычислим коэффициенты функции (2) по формулам:

$$a = \sum_{i,j} u_i^2 = 5\sum_{i=1}^{5} u_i^2 = 5\sum_{i=1}^{5} \ln^2 \frac{L_i}{L_0},$$

$$b = 2\sum_{i,j} u_i v_j = 2\left(\sum_{i=1}^{5} \ln \frac{L_i}{L_0}\right)\left(\sum_{j=1}^{5} \ln \frac{K_j}{K_0}\right),$$

$$c=\sum_{i,j} v_j^2 = 5\sum_{j=1}^{5}\ln^2\frac{K_j}{K_0},$$

$$d=-2\sum_{i,j} u_i\, w_{ij} = -2\sum_{i=1}^{5}\ln\frac{L_i}{L_0}\sum_{j=1}^{5}\ln\frac{Q_{ij}}{Q_0},$$

$$e=-2\sum_{i,j} v_j w_{ij} = -2\sum_{j=1}^{5}\ln\frac{K_j}{K_0}\sum_{i=1}^{5}\ln\frac{Q_{ij}}{Q_0},$$

$$f_0=\sum_{i,j} w_{ij}^2 = \sum_{i,j}\ln^2\frac{Q_{ij}}{Q_0}.$$

Получим следующие результаты: $a\approx 8{,}2$, $b\approx 2{,}3$, $c\approx 26{,}82$, $d\approx -12$, $e\approx -15{,}5$, $f_0\approx 6{,}37$.

Функция является выпуклой на всей плоскости, так как $4ac-b^2=874{,}6721>0$. Точка глобального минимума функции (2) найдена методом сопряженных градиентов в Microsoft Excel.

С учетом найденных параметров функция Кобба — Дугласа (1) имеет вид

$$Q=18{,}6\cdot\left(\frac{L}{9{,}2}\right)^{0{,}7}\left(\frac{K}{16}\right)^{0{,}26}.$$

***Оптимизация производства при фиксированном объеме продукции.***

Пусть имеется заказ на производство партии продукции объемом $Q=60$. Издержки производства зависят от цен $p_1$ и $p_2$ на ресурсы: $c(x_1, x_2)=5x_1+8x_2$ где

$$x_1=\frac{L}{L_0},\quad x_2=\frac{K}{K_0}.$$

Для полученной функции Кобба — Дугласа и линейной функции издержек производства рассмотрим задачу минимизации издержек при фиксированном значении объема производства $Q$:

$$p_1x_1+p_2x_2=c(x_1,x_2)\to\min;$$
$$f(x_1,x_2)=Q=\text{const}.$$

Сформулированная модель является задачей нахождения условного экстремума и решается методом множителей Лагранжа [3, 5]. Функция Лагранжа в рассматриваемом случае:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda(Q-f(x_1,x_2)),$$

где $f(x_1,x_2)=Q_0\,x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$. Необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases}\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=p_1,\\ \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=p_2,\\ Q=f(x_1,x_2).\end{cases}\qquad(3)$$

Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=Q_0\,\alpha\,x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=Q_0\,\beta\,x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}.$$

Из системы (3), разделив первое уравнение на второе и выразив $x_1$ через $x_2$, получим

$$x_2=\frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha}x_1.$$

Подставим в уравнение изокванты, соответствующей фиксированному объему производства $Q$, полученное выражение для $x_2$:

$$Q=Q_0\,x_1^{\alpha+\beta}\left(\frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta}.\qquad(4)$$

Уравнение (4) имеет корень

$$Q=Q_0\,x_1^{\alpha+\beta}\left(\frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta}.\ \text{Тогда}\ x_2^0=\frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha}x_1^0.$$

Точка $R(x_1^0,\ x_2^0)=(5{,}03;1{,}17)$ — единственное решение задачи на условный экстремум.

Составим определитель по следующей формуле:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0 & \varphi'_{x_1}(R) & \varphi'_{x_2}(R)\\ \varphi'_{x_1}(R) & L''_{x_1x_1}(R) & L''_{x_1x_2}(R)\\ \varphi'_{x_2}(R) & L''_{x_1x_2}(R) & L''_{x_2x_2}(R)\end{vmatrix},\qquad(5)$$

где $\varphi(x_1,x_2)=Q-f(x_1,x_2)$, и покажем, что найденная точка $R$ является точкой условного минимума. Частные производные от функции $\varphi(x_1,x_2)$ и функции Лагранжа:

$$\varphi'_{x_1}=-Q_0\cdot\alpha\cdot x_1^{\alpha-1}\cdot x_2^{\beta},$$

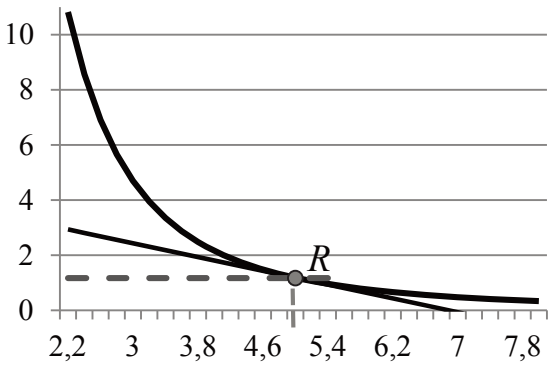


*Рис.1.* Графическая иллюстрация оптимального решения задачи минимизации издержек при фиксированном объеме производства

$$\varphi'_{x_2} = -Q_0 \cdot \beta \cdot x_2^{\beta-1} \cdot x_1^{\alpha},$$

$$L''_{x_1x_1} = -\lambda \cdot Q_0 \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot x_1^{\alpha-2} \cdot x_2^{\beta},$$

$$L''_{x_1x_2} = -\lambda \cdot Q_0 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta-1},$$

$$L''_{x_2x_2} = -\lambda \cdot Q_0 \cdot \beta \cdot (\beta-1) \cdot x_2^{\beta-2} \cdot x_1^{\alpha}.$$

Вычислим частные производные в точке $R$ и подставим найденные значения в формулу (5):

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -8,35 & -13,36 \\ -8,35 & 0,5p_0 & -1,86p_0 \\ -13,36 & -1,86p_0 & 8,47p_0 \end{vmatrix} = p_0 \cdot 1094,78.$$

Определитель $\Delta > 0$, так как рыночная цена $p_0$ на производимую продукцию всегда положительна, а значит, точка с координатами $R(5,03;1,17)$ является точкой условного минимума. Функция издержек производства в этой точке принимает наименьшее значение $c_{\min} = p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = 34,49$.

На рисунке 1 построены изокоста (прямая $5x_1+8x_2=34,49$) и изокванта, описываемая уравнением

$$x_2 = \exp\left(\frac{1}{\beta}\ln\frac{Q}{Q_0x_1^{\alpha}}\right).$$

Оптимальное решение есть точка касания этих линий: векторы grad$f$ и grad$c$ сонаправлены, поскольку

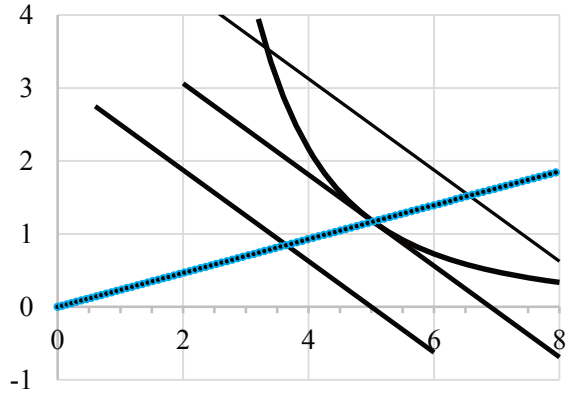


*Рис.2. Линия долгосрочного развития предприятия.*

$$\text{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{p_1}{\lambda}, \frac{p_2}{\lambda}\right), \text{ а grad}c=(p_1, p_2).$$

Рассмотрим функцию прибыли предприятия $\Pr(x_1, x_2)=p_0f(x_1, x_2)-(p_1x_1+p_2x_2)$, где $p_0$ — рыночная цена выпускаемой продукции. В точке условного экстремума

$$\frac{\partial \Pr}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pr}{\partial x_2} = 0, \text{ следовательно,}$$

$$p_0\frac{\partial f}{\partial x_1} = p_1, \quad p_0\frac{\partial f}{\partial x_2} = p_2,$$

откуда с учетом (3) имеем:

$$p_0\frac{p_1}{\lambda} = p_1, \quad p_0\frac{p_2}{\lambda} = p_2, \text{ т. е. множитель}$$

Лагранжа равен рыночной цене выпускаемой продукции: $\lambda=p_0$.

Проведем расчеты для задачи оптимизации при различных значениях объема производства $Q$. При увеличении объема производства от нуля до 95 единиц получим точки оптимального использования ресурсов, каждая из которых является решением задачи на условный экстремум. Линия, составленная из полученных точек, показана на рисунке 2 и является линией долгосрочного развития предприятия.

Все вычисления произведены с помощью электронных таблиц Microsoft Excel, что позволяет легко менять любые параметры математической модели для анализа и прогнозирования работы предприятия.

## Литература

1. ***Баранов С.В.*** Эконометрические модели производственных функций: история и современность // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 10 (часть 2). С. 53—57. Текст: электронный. URL: http://applied-research.ru/ru/article/view?id=5996 (дата обращения: 01.07.2019).

2. ***Рузанов А.И.*** Производственные функции и их использование для описания закономерностей производства // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 5(1). С. 212—217.

3. ***Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.*** Математические методы в экономике: учебник. М.: ДиС, 2009.

4. ***Лебедев В.В., Лебедев К.В., Михайлов А.А.*** К вопросу о применимости производственных функций для системного анализа реальной экономики // Системный анализ в науке и образовании. 2014. № 1. С. 90—96.

5. ***Ревякин А.М., Бардушкина И.В.*** Математические методы моделирования в экономике: учеб. пособ. М.: МИЭТ, 2013. 328 с.

6. ***Бардушкина И.В., Кочетыгова Т.В., Рыжкова И.В.*** Использование экономических функций в практико-ориентированных заданиях при изучении высшей математики: тезисы доклада // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2017. № 4(16). С. 126—129.

7. ***Бардушкина И.В., Кочетыгова Т.В., Рыжкова И.В.*** Об использовании производственной функции в практико-ориентированных заданиях при изучении высшей математики // Четвертые Декартовские чтения «Рационализм и универсалии культуры»: Мат-лы межд. науч.-практ. конф. (16—17 ноября 2017 г.). Ч. 2. М.: МИЭТ, 2017. С. 203—212.

Поступила 20.11.2019

***Бардушкина Ирина Вячеславовна*** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 2 Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д.1), *i_v_bars@mail.ru*

***Ермилова Полина Владимировна*** — студентка второго курса Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д.1), *ermilovap@icloud.com*

## References

1. Baranov S.V. Jekonometricheskie modeli proizvodstvennyh funkcij: istorija i sovremennost' // Mezhdunarodnyj zhurnal prikladnyh i fundamental'nyh issledovanij. 2014. № 10 (chast' 2). S. 53—57. Tekst: jelektronnyj. URL: http://applied-research.ru/ru/article/view?id=5996 (data obrashhenija: 01.07.2019).

2. Ruzanov A.I. Proizvodstvennye funkcii i ih ispol'zovanie dlja opisanija zakonomernostej proizvodstva // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2011. № 5(1). S. 212—217.

3. Zamkov O.O., Tolstopjatenko A.V., Cheremnyh Ju.N. Matematicheskie metody v jekonomike: uchebnik. M.: DiS, 2009.

4. Lebedev V.V., Lebedev K.V., Mihajlov A.A. K voprosu o primenimosti proizvodstvennyh funkcij dlja sistemnogo analiza real'noj jekonomiki // Sistemnyj analiz v nauke i obrazovanii. 2014. № 1. S. 90—96.

5. Revjakin A.M., Bardushkina I.V. Matematicheskie metody modelirovanija v jekonomike: ucheb. posob. M.: MIJeT, 2013. 328 s.

6. Bardushkina I.V., Kochetygova T.V., Ryzhkova I.V. Ispol'zovanie jekonomicheskih funkcij v praktiko-orientirovannyh zadanijah pri izuchenii vysshej matematiki: tezisy doklada // Jekonomicheskie i social'no-gumanitarnye issledovanija. 2017. № 4(16). S. 126—129.

7. Bardushkina I.V., Kochetygova T.V., Ryzhkova I.V. Ob ispol'zovanii proizvodstvennoj funkcii v praktiko-orientirovannyh zadanijah pri izuchenii vysshej matematiki // Chetvertye Dekartovskie chtenija «Racionalizm i universalii kul'tury»: Mat-ly mezhd. nauch.-prakt. konf. (16—17 nojabrja 2017 g.). Ch. 2. M.: MIJeT, 2017. S. 203—212.

Submitteed 20.11.2019

***Bardushkina Irina V.*** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics No. 2, National Research University MIET (Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, Shokin square, 1), *i_v_bars@mail.ru*

***Ermilova Polina V.*** — second-year student of MIET National Research University (Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, Shokin square, 1), *ermilovap@icloud.com*