УДК 517(076.1) DOI: 10.24151/2409-1073-2021-1-121-125

Общность понятия предела в математическом анализе как тема обзорной лекции

А.И. Гавриков

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

gai-miet@yandex.ru

Автор предлагает использовать обзорные лекции для систематизации знаний, углубления и расширения изучаемого материала. В качестве примера рассматривается дисциплина «Математический анализ». Предлагается построить обзорную лекцию на основе общности основного понятия математического анализа — понятия предела. Автор приводит возможное содержание лекции, включающее установление общности понятия, его практическое применение и практико-ориентированное введение.

Ключевые слова: систематизация, математический анализ, предел, общность.

The generality of the concept of limit in mathematical analysis as the topic of the review lecture

A.I. Gavrikov

National Research University «MIET»

gai-miet@yandex.ru

The author suggests using review lectures to systematize knowledge, deepen and expand the material being studied. As an example, the discipline ”Mathematical Analysis.»It is proposed to build a review lecture based on the generality of the basic concept of mathematical analysis - the concept of limit. The author gives the possible content of the lecture, including the establishment of a common concept, its practical application and a practice-oriented introduction.

Keywords: systematization, mathematical analysis, limit, generality.

Установление общности понятия предел. Через весь курс математического анализа проходит понятие предела, но в разных частях курса оно имеет различные формы.

Обычно изучение предела начинается с простейшего случая — предела последовательности. Именно применительно к этому случаю была подробно развита теория пределов. Далее понятие предела обобщалось на случаи предела функции от одной или нескольких переменных. Предельный процесс усложнился, но его характер в общем сохранился, хотя произошел принципиальный переход — от счетного дискретного множества членов последовательности к непрерывным (или сплошным) множествам определения функций. Этот принципиальный переход иллюстрируется определением предела функции по Коши и Гейне.

В дифференциальном исчислении вводится понятие производной для функции одного переменного и частной производной для функции многих переменных. Производная — это тоже предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. Изучая интегральное исчисление (определенный интеграл), мы приходим к рассмотрению пределов интегральных сумм Римана и Дарбу, связанных с разбиением на части заданного отрезка. По сравнению с ранее изученными, этот предельный процесс представляет уже значительное своеобразие. К пределам этого типа могут относиться пределы, связанные с вычислением длин дуг, площадей плоских фигур, площадей поверхности и объемов тел вращения.

При введении понятий криволинейных, поверхностных и кратных интегралов возникают предельные процессы, похожие на вышеперечисленные, но отличающиеся от них, так как интегральные суммы будут иметь различный вид. В теории рядов мы приходим к пределам частичных сумм ряда. При введении несобственных интегралов мы рассматриваем пределы соответствующих определенных интегралов.

Общность понятий предела состоит в том, что все упомянутые разновидности предела принципиально могут быть сведены к пределу последовательности. Сведение сложных предельных процессов к простому пределу последовательности представляет интерес само по себе, но, главное, оно освобождает нас от необходимости каждый раз вновь устанавливать элементарные теоремы из теории пределов. Подобным путем восстанавливается единство всех, встретившихся при изучении курса математического анализа в вузе, видов пределов.

Как этот факт отразится на усвоении студентами курса математического анализа, и что должен поменять лектор при чтении лекций? Разберем по порядку, начиная с первого семестра. После школы студент встречается с множеством новых понятий, некоторые из них особенно сложны для понимания. Математический анализ изучает процессы, происходящие с переменными величинами, и зависимости между ними. Естественно, что школьной базы знаний (в нее входят отдельные элементы, относящиеся к понятиям производной, первообразной и определенного интеграла) не хватает. Прежде всего к сложным для усвоения относятся понятия предела последовательности и функции, супремума (точной вехней грани множества) и инфимума (точной нижней грани множества), вложенных отрезков. Поэтому надо более детально подавать этот материал, по возможности иллюстрируя его рисунками. Следует рассказать о различиях супремума и максимума, инфимума и минимума и их взаимосвязях. Понятия ограниченности и монотонности последовательности должны увязываться с ее сходимостью. Переходя к пределу функции, следует в первую очередь рассказать о непрерывных (сплошных) множествах и их отличии от счетных дискретных множеств. При введении понятия определенного интеграла особое внимание следует обратить на построение интегральной суммы и на тот факт, что ее предел не должен зависеть от способа разбиения отрезка, на котором задана функция, и от выбора точек внутри каждого частичного отрезка, в которых вычисляются значения функции.

Рассмотрим криволинейные интегралы первого и второго рода. При их введении происходит разбиение дуги на частичные отрезки, составление интегральной суммы и предельный переход при мелкости разбиения, стремящейся к нулю. Следует заметить, что интегральные суммы для криволинейных интегралов первого и второго рода составляются по-разному. В первом случае это сумма произведений значений функции, определенной на кривой, взятых в ее произвольной точке, на частичные элементы длины дуги; во втором — сумма скалярных произведений вектор-функции, определенной в точках кривой, взятых в ее произвольной точке, и векторов, соединяющих последовательные точки деления кривой.

Следует отметить сходство и различие интегральных сумм для определенного интеграла и криволинейных интегралов первого и второго рода, затем — привести определения интегральных сумм для поверхностных интегралов первого и второго рода и отметить их сходство и различие.

Рассмотрим подробнее пределы последовательностей частичных сумм ряда. Здесь мы отмечаем различные виды сходимости. Вводятся понятия абсолютной, условной и равномерной сходимостей рядов. Надо обратить внимание на то, что равномерная сходимость возможна только на множестве, в отличие от простой сходимости (сходимости в точке). Следует упомянуть о сходимости в средне-квадратичном, например, рядов Фурье.

Практическое применение понятия предел. В продолжение изложенного выше рассмотрим применение понятия предела для приближенных вычислений. Применяя производные и интегралы, мы получаем точное решение поставленной задачи, хотя сами производные и интегралы являются пределами некоторых построенных приближенных выражений. Но не все задачи можно решить точно с помощью полученных аналитических выражений. Многие могут быть решены только приближенно. Например, дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных. Для этого производится обратное действие, предел, например частная производная, заменяется на близкое к ней разностное выражение — от значений функции в соседних точках, расположенных по определенному шаблону. Получаются системы линейных разностных алгебраических уравнений, называемых сеточными уравнениями и решаемых численными методами (прямыми или итерационными). Определенный интеграл заменяется на интегральную сумму с заданной степенью точности и считается методом прямоугольников, трапеций и другими численными методами.

Для вычисления так называемых неберущихся интегралов, то есть интегралов, у которых первообразная не выражается элементарными функциями, подынтегральная функция разлагается в сходящийся степенной ряд.

Практико-ориентированное введение понятия предел. На лекции важно также показать, что понятие предела естественным образом возникает из практических прикладных задач. Покажем это на примере понятия определенного интеграла как предела интегральных сумм. Многие студенты могут дать формальное определение определенного интеграла, но не могут самостоятельно применить его к решению простых практических задач. Это связано с тем, что фактически ими не усвоена схема применения определенного интеграла. Изложим эту схему, следуя учебным программам для вузов [1, 2].

Представим, что надо определить некоторую постоянную величину Q (геометрическую, физическую, техническую и др.), связанную с некоторым диапазоном изменения величины x, от которой Q зависит (с промежутком [a,b]). Пусть при этом каждому частичному промежутку $\left[x, x+\Delta x\right] \in \left[a, b\right]$ соответствует некоторая часть величины Q, ΔQ, так что разложение [a,b] на частичные промежутки влечет за собой разложение на соответствующие части и величины Q. Таким образом, мы имеем некоторую «функцию» от промежутка Q [a,b], обладающую свойством аддитивности. Задача состоит в вычислении значения Q, отвечающего всему промежутку [a,b]. Рассмотрим «элемент» ΔQ величины Q, отвечающий элементарному промежутку $[x, x+\Delta x]$. Необходимо для ΔQ найти приближенное выражение вида $q(x)\Delta x$, линейное относительно Δx, так, чтобы оно отличалось от ΔQ лишь на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx; то есть из бесконечно малого (при $\Delta x \to 0$) «элемента» ΔQ выделим его главную часть. Тогда $\Delta Q \approx q(x)\Delta x \ldots (1)$, где погрешность приближения $O(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Только после проведения этих исследований можно утверждать, что искомая величина Q точно (без приближений) выражается определенным интегралом

$$Q = \int_a^b q(x)dx. \qquad (2)$$

Объясним сказанное более подробно. Разобьем отрезок [a,b] произвольным образом на частичные отрезки точками $x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_n = b$, то есть введем разбиение R отрезка [a,b]. Получим элементарные отрезки $[a, x_1], [x_1, x_2] \ldots\ldots [x_{n-1}, b]$. Так как каждому отрезку $[x_i, x_{i+1}]$ или $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ (что то же самое) соответствует элементарная часть величины ΔQ, приближенно равная $q(x_i)\Delta x_i$, то вся искомая величина Q приближенно выразится формулой

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\Delta x_i,$$

которую мы в традиционном преподавании математики называем интегральной суммой, или суммой Римана.

Степень точности тем выше, чем мельче разбиение, так что можно надеяться, что величина Q будет пределом написанной суммы, то есть выразится определенным интегралом

$$Q = \int_a^b q(x)dx.$$

Резюмируя сказанное, можно сказать, что процесс моделирования сводится к установлению приближенного равенства (1), из которого предельным переходом получаем окончательный результат (2). Использование интеграла вместо интегральной суммы существенно. Интегральная сумма дает приближенное значение величины Q, а предельный переход к интегралу нивелирует погрешность приближения и приводит к абсолютно точному вычислению величины Q.

Рассмотрим пример из курса высшей математики [3], где рассчитывается масса линейного неоднородного стерженя, лежащего на оси x в пределах отрезка [a,b]. Требуется определить массу этого стержня. Пусть плотность распределения массы вдоль стержня является некоторой непрерывной функцией от x, например, $\rho(x) = m(x-a)^2$, где m — некоторая константа. Для определения массы стержня разобьем его на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = b$. На каждом частичном отрезке возьмем левую точку x_k. Так как в пределах частичного отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ функция $\rho(x)$ изменяется мало, то массу части стержня, соответствующей отрезку $[x_k, x_{k+1}]$, можно считать приближенно равной $m(x_k - a)^2 \Delta x_k$. Масса всего стержня приближенно равна

$$\sum_{k=1}^{n} m(x_k - a)^2 \Delta x_k.$$

А точное значение массы получим предельным переходом к определенному интегралу при диаметре разбиения, стремящемся к нулю.

В заключение можно резюмировать сказанное: понятие предела является основой для систематизации различных математических знаний и разделов математики и включения их в отдельную дисциплину «Математический анализ». Состав разделов обзорной лекции и тема могут меняться в зависимости от конкретных учебных дисциплин, их объема и содержания программ соответствующего года обучения. Однако общий подход к содержанию лекции — это систематизация усвоенных знаний, в целях получения стройной системы изученной дисциплины на базе рассмотрения ее основных понятий.

Литература

1. *Кальней С.Г.* Математический анализ: учеб. пособ. Ч.1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и многих переменных. М.: МИЭТ, 2014. 267 с.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. для вузов : в 3 т. 8-е изд. Т. 2. М. : Физматлит; СПб. : Нев. диалект, 2001. 863 с.

3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Т.2: Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Дрофа, 2004. 512 с.

Поступила 31.01.2021

Гавриков Анатолий Иванович — кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики (ВМ-2) Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, Зеленоград, пл. Шокина,1), *gai-miet@yandex.ru*

References

1. Kal'nei C.G. Matematicheskii analiz: ucheb. posob. Ch.1: Differentsial'noe i integral'noe ischisleniya funktsii odnoi i mnogikh peremennykh. M.: MIET, 2014. 267 s.

2. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya : ucheb. dlya vuzov : v 3-kh t. 8-e izd. T. 2. M. : Fizmatlit; SPb. : Nev. dialekt, 2001. 863 s.

3. Bugrov Ya.S., Nikol'skii S.M. Vysshaya matematika. T.2: Differentsial'noe i integral'noe ischislenie. M.: Drofa, 2004. 512 s.

Submitted 31.01.2021

Gavrikov Anatoly I., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics (HM-2) National Research University of Electronic Technology (MIET) (Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, Shokina Square, 1), *gai-miet@yandex.ru*