УДК 330.4:519.1

DOI: 10.24151/2409-1073-2018-4-36-40

Матроиды и сильная связность орграфов в математическом моделировании экономических систем

А. Н. Исаченко[1], *А. М. Ревякин*[2]

[1] *Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь*
[2] *Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Россия*

arevyakin@mail.ru

В основе многих сетевых моделей экономики лежат элементы теории матроидов и теории графов. Рассматриваются задачи введения на улицах эффективной схемы одностороннего движения и оптимального размещения соединительных элементов для жесткости планарных квадратных ферм. Предложенные алгоритмы решения этих задач основываются на необходимых и достаточных условиях для сильной связности орграфа, алгоритмах построения остовов минимального веса и кратчайших расстояний, а также методах нахождения центров и медиан в сети.

Ключевые слова: математическая модель; экономическая система, матроид, жадный алгоритм, сильно связный граф, остовное дерево, жесткость планарной квадратной фермы.

Matroid and Strong Connectivity of the Digraphs in the Mathematical Modeling of Economic Systems

A. N. Isachenko[1], *A. M. Revyakin*[2]

[1] *Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*
[2] *National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia*

arevyakin@mail.ru

Elements of the theory of matroids and graph theory lie at the heart of many network models of the economy. The authors consider the problems of introduction of an effective scheme for one-way traffic on the streets and optimal placement of the connecting elements to the square planar frameworks for their rigidity. They proposed algorithms for solving these problems, based on the necessary and sufficient conditions for strong connectivity of the digraph, algorithms for constructing spanning trees of minimal weight or shortest distances, as well as methods for finding centers and medians in network.

Keywords: mathematical model; economic system; matroid; greedy algorithm; strongly connected graph; spanning tree; planar square framework rigidity.

В настоящей статье авторами продолжено изучение сетевых моделей экономики, базирующихся на матроидах и теории графов [1; 2]. Используются терминология и обозначения, введенные в монографиях Н. Кристофидеса и А. Речки [3; 4].

Эффективность схем уличного движения. Пусть для сети городских улиц с двусторонним движением надо ввести одностороннее движение таким образом, чтобы из любого места можно было попасть в любое другое. Иными словами, в графе *G*, вершинами которого являются перекрестки города, а ребрами — дороги с двусторонним движением, необходимо задать ориентацию ребер так, чтобы граф G стал сильно связным.

Теорема (Роббинс [4]). Граф G имеет сильно связную ориентацию тогда и только тогда, когда G связен и не содержит мостов.

В доказательстве теоремы содержится идея алгоритма введения на городских улицах одностороннего движения. Если $G = (V, E)$ — связный граф без мостов, то сильно связную ориентацию можно получить, например, так.

Сначала с помощью алгоритма поиска в глубину построим для графа G корневое остовное дерево. В результате все вершины графа G будут помечены натуральными числами от 1 до $|V|$ (см.: [3; 5]).

Время работы алгоритма поиска в глубину составляет $O(|V| + |E|)$. Все ветви полученного дерева ориентируем от вершин с меньшими номерами к вершинам с большими номерами, а хорды (ребра графа G, не принадлежащие дереву) — из вершин с большими номерами к вершинам с меньшими номерами.

Описанный метод часто порождает неэффективные схемы одностороннего уличного движения [5; 6].

Определим понятие *эффективной* схемы одностороннего движения и предложим алгоритмы ее нахождения.

Назовем подмножество A семейства дуг E ориентацией графа G. Пусть требуется ввести одностороннее движение не на всех улицах, а на большей части из них. Другими словами, нужно задать ориентацию A сети $G = (V, E)$ так, чтобы из любой вершины графа G существовали ориентированные пути во все остальные вершины G. В качестве критерия эффективности схемы будем рассматривать диаметр получающегося сильно связного смешанного графа, т. е. $\max d(u, v)$ по всем $u, v \in E$, где $d(u, v)$ — длина кратчайшего пути из u в v.

Для решения этой задачи предлагаем поступать, например, так.

1. Найти матрицу кратчайших расстояний между всеми вершинами сети $G = (V, E)$ (например, с помощью алгоритма Флойда [3; 7]).

2. В сети $G = (V, E)$ найти центр [3; 7]. Очевидно, центром является вершина v, соответствующая строке в матрице кратчайших расстояний с наименьшим максимальным значением.

3. С помощью алгоритма Дейкстры [3; 7] построить остов T кратчайших расстояний из центра сети $G = (V, E)$ во все остальные вершины. Ориентацию ветвей остова T и нумерацию вершин осуществить с помощью алгоритма поиска в глубину на дереве T из найденного центра a сети G.

4. Ориентировать все хорды сети G от вершин с большими номерами к вершинам с меньшими номерами. В неориентированной сети, составленной из хорд сети G, найти кратчайшие расстояния из центра a во все остальные вершины. В случаях, когда расстояние превосходит диаметр сети или вершина не достижима из a, снять ориентацию на соответствующих ветвях, сделав их не ориентируемыми.

Пусть G — ориентированный сильно связный граф. Минимальное число дуг, удаление которых из графа G превращает его в не сильно связный, называется степенью дуговой уязвимости графа G. Представляется интересной задача введения такой схемы одностороннего движения, которая не только была бы эффективной, но и отличалась наибольшей степенью дуговой уязвимости. Эта задача, сформулированная в [5], остается нерешенной.

Жесткость ферм. Пусть в некоторые квадраты $(k \times l)$-планарной фермы (см. [1]) добавлены дополнительные диагональные жесткие стержни. При этом в одних случаях ферма под воздействием внешних сил деформируется, а в других — нет (остается жесткой). Далее рассмотрим вопросы, связанные с жесткостью планарных квадратных ферм.

Построим граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ и соединим в нем вершины v_i и u_j ребром в том и только том случае, когда в квадрате сетки, соответствующей i-й строке и j-му столбцу, размещен диагональный стержень. Очевидно, построенный граф $G = (V, E)$ является двудольным (все его циклы имеют четную длину).

Теорема (Болкер, Крапо [8; 9]). Квадратная решетка с набором диагональных стержней жестка, если и только если построенный двудольный граф G является связным.

Наименьшее число ребер в связном графе не может быть меньше числа ребер в его остовном поддереве. Поэтому для жесткости $(k{\times}l)$-квадратной фермы потребуется добавить не менее чем $k + l - 1$ диагональных стержней.

Граф на рис. 1, соответствующий (3×3)-ферме, не является связным. Поэтому (3×3)-ферма не является жесткой. Возможная деформация этой фермы также показана на рис. 1.

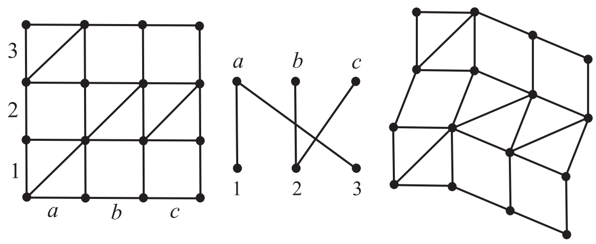
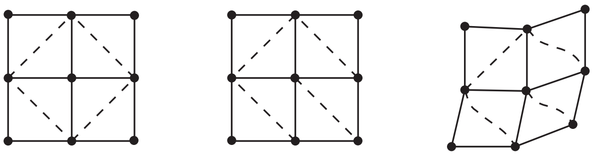


Рис. 1. (3×3)-ферма и соответствующие ей граф и деформация

Из теоремы следует, что $k + l - 1$ — это наименьшее количество диагональных стержней, необходимых для жесткости $(k{\times}l)$-квадратной фермы, поскольку только при таком числе ребер построенный двудольный граф может быть связным деревом.

Пусть теперь в планарную ферму вместо жестких диагональных стержней добавлены деформирующие соединения, например, веревки. При этом важен способ завязывания веревок (сверху вниз или наоборот). На рис. 2 изображены фермы с равным числом веревок, добавленных в одни и те же места фермы, но завязанных по-разному. При этом одна ферма (рис. 2*а*) является жесткой, а другая (рис. 2*б*) не является. Деформация нежесткой фермы изображена на рис. 2*в*.



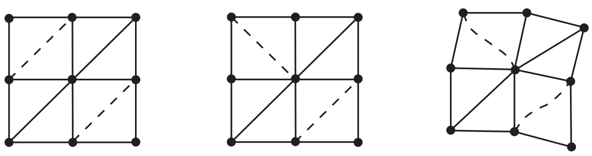
а) б) в)

Рис. 2. (2×2)-фермы с равным числом добавленных веревок и деформация второй фермы

На рис. 3 изображены фермы, в которых присутствуют и жесткие стержни, и веревки. Они отличаются направлением веревок, вследствие чего первая ферма (рис. 3*а*) является жесткой, а вторая (рис. 3*б*) не является. Деформация нежесткой фермы изображена на рис. 3*в*.

Преобразуем смешанные графы рассматриваемых ферм (рис. 3*а* и 3*б*) в ориентированные графы. Это легко сделать, заменив все ребра парой ориентированных ребер (дуг), направленных в противоположные стороны. Орграфы рассматриваемых ферм представлены на рис. 4. Причем первый граф является сильно связным, а второй — нет.

Нетрудно доказать, что смешанная ферма с диагональными жесткими стержнями и деформирующими веревками будет жесткой, если соответствующий ей двудольный ориентированный граф будет сильно связным (см. [4; 10]). Отсюда, чтобы сделать $(k{\times}l)$-планарную ферму жесткой, используя веревки, нужно добавить по крайней мере $2\max\{k, l\}$ элементов.



а) б) в)

Рис. 3. Смешанные фермы и деформация второй фермы

Рис. 4. Орграфы смешанных ферм, изображенных на рис. 3

Пусть для заданной планарной фермы известны места, где могут быть размещены диагональные стержни или веревки, а также стоимость такого размещения. Требуется разместить диагональные соединения так, чтобы ферма стала жесткой с наименьшими затратами. Другими словами, необходимо в двудольной сети найти ориентацию минимального веса.

Для решения этой задачи предлагаем поступать, например, так.

1. Найти матрицу кратчайших расстояний между каждой парой вершин сети $G = (V, E)$ (например, с помощью алгоритма Флойда [3; 7]).

2. В сети $G = (V, E)$ найти медиану [3; 7]. Очевидно, центром является вершина v, соответствующая в матрице кратчайших расстояний строке с наименьшей суммой всех элементов.

3. С помощью одного из алгоритмов Краскала, Прима или Борувки [3; 4; 7] построить остов T минимального веса. Ориентацию ветвей остова T и нумерацию вершин осуществить с помощью алгоритма поиска в глубину на T из медианы a сети G.

4. Ориентировать все хорды сети G от вершин с большими номерами к вершинам с меньшими номерами. Найти остов (или лес) минимального веса в неориентированной сети, составленной из хорд сети G. В случаях, когда сеть из хорд не связна, придать ей связность, добавив некоторые ветви и сделав их не ориентируемыми.

Можно привести и другие примеры задач с экономическим содержанием, в основе которых лежат понятия сильной связности ориентированных графов и матроиды.

В заключение отметим, что матроидный подход, как доказано ранее [1; 3; 5; 10; 11; 12], может успешно применяться для решения экономико-математических задач.

Литература

1. ***Ревякин А. М.*** Сетевые модели для принятия решений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Экономика. 2013. № 3 (24). С. 173—183.
2. ***Исаченко А. Н., Ревякин А. М.*** Матроиды в математическом моделировании экономических систем // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2015. № 1 (5). С. 13—18.
3. ***Кристофидес Н.*** Теория графов: Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.: ил.
4. ***Recski A.*** Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics. Budapest: Akademiai Kiado; Berlin: Springer-Verlag, 1989. XIII, 533 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-22143-3
5. ***Робертс Ф. С.*** Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Пер. с англ. А. М. Раппопорта, С. И. Травкина; под ред. А. И. Теймана. М.: Наука, 1986. 496 с.: ил.
6. ***Robbins H. E.*** A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control // The American Mathematical Monthly. 1939. Vol. 46, No. 5. P. 281—283. https://doi.org/10.2307/2303897
7. ***Ревякин А. М., Бардушкина И. В.*** Математические методы моделирования в экономике. М.: МИЭТ, 2013. 327 с.: ил., табл.
8. ***Bolker E. D., Crapo H.*** How to brace a one-story building // Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science. 1977. Vol. 4, No. 2. P. 125—152. https://doi.org/10.1068/b040125
9. ***Crapo H.*** More on the bracing of one-story buildings // Environment and Planning B: Planning and Design, Pion Ltd. 1977. Vol. 4 (2). P. 153—156.
10. ***Ревякин А. М., Речки А.*** Жесткость планарных ферм с удаленными фрагментами // Дискретная математика и ее приложения: Материалы VIII Международного семинара (2—6 февр. 2004). М.: Изд-во механико-матем. ф-та МГУ, 2004. С. 219—221.
11. ***Oxley J. G.*** Matroid Theory. Oxford; New York; Tokyo: Oxford University Press, 2006. XII, 532 p. (Oxford Mathematics).
12. ***Revyakin A. M.*** Matroids // Journal of Mathematical Sciences. 2002. Vol. 108, No. 1. P. 71—130. https://doi.org/10.1023/A:1012757316376
13. Matroid applications / Ed.: N. White. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 376 p. (Encyclopedia of Mathematics and Applications; Book 40).

Поступила после доработки 04.10.2018

Исаченко Александр Николаевич — доцент кафедры информационных систем управления Белорусского государственного университета (Республика Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4), *isachen@bsu.by*

Ревякин Александр Михайлович — доцент кафедры высшей математики № 2 Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д. 1), *arevyakin@mail.ru*

References

1. Revyakin A. M. Setevye modeli dlya prinyatiya reshenii (Network Models for Decision Making), *Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta, Seriya Ekonomika,* 2013, No. 3 (24), pp. 173—183.
2. Isachenko A. N., Revyakin A. M. Matroidy v matematicheskom modelirovanii ekonomicheskikh sistem (Matroids in Mathematical Modeling of Economic

Systems), *Ekonomicheskie i sotsial'no-gumanitarnye issledovaniya,* 2015, No. 1 (5), pp. 13—18.

3. Kristofides N. (Christofides N.) Teoriya grafov: Algoritmicheskii podkhod (Graph Theory), M., Mir, 1978, 432 p., il.

4. Recski A. Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics. Budapest: Akademiai Kiado, Berlin: Springer-Verlag, 1989. xiii, 533 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-22143-3

5. Roberts F. S. Diskretnye matematicheskie modeli s prilozheniyami k sotsial'nym, biologicheskim i ekologicheskim zadacham (Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems), Per. s angl. A. M. Rappoporta, S. I. Travkina, pod red. A. I. Teimana, M., Nauka, 1986, 496 p., il.

6. Robbins, H. E. "A Theorem on Graphs, with an Application to a Problem of Traffic Control." *The American Mathematical Monthly,* vol. 46, no. 5, 1939, pp. 281—283. *JSTOR,* JSTOR, www.jstor.org/stable/2303897.

7. Revyakin A. M., Bardushkina I. V. Matematicheskie metody modelirovaniya v ekonomike (Mathematical Modeling Methods in Economics), M., MIET, 2013, 327 p., il., tabl.

8. Bolker, E. D., and H. Crapo. "How to Brace a One-Story Building." *Environment and Planning B: Planning and Design,* vol. 4, no. 2, Dec. 1977, pp. 125—152, https://doi.org/10.1068/b040125

9. Crapo, H. "More on the bracing of one-story buildings." *Environment and Planning B: Planning and Design,* Pion Ltd., vol. 4, no. 2, 1977, pp. 153—156.

10. Revyakin A. M., Rechki A. Zhestkost' planarnykh ferm s udalennymi fragmentami (Rigidity of Planar Frameworks with Removed Fragments), *Diskretnaya matematika i ee prilozheniya, Materialy VIII Mezhdunarodnogo seminara (2—6 fevr. 2004),* M., Izd-vo mekhaniko-matem. f-ta MGU, 2004, pp. 219—221.

11. Oxley J. G. Matroid Theory. Oxford, New York, Tokyo: Oxford University Press, 2006. xii, 532 p., Oxford Mathematics.

12. Revyakin, A. M. "Matroids." *Journal of Mathematical Sciences,* vol. 108, no. 1, 2002, pp. 71—130, https://doi.org/10.1023/A:1012757316376

13. White, N., editor. *Matroid Applications.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 376 p., Encyclopedia of Mathematics and Applications, Book 40.

Submitted after updating 04.10.2018

Isachenko Aleksandr N., Ph.D. of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, associate professor at the Department of Information Management Systems, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus), *isachen@bsu.by*

Revyakin Alexander M., Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, associate professor of Higher Matematics Department No. 2, National Research University of Electronic Technology (1, Shokin sq., Zelenograd, 124498, Moscow, Russia), *arevyakin@mail.ru*