УДК 37.026 DOI: 10.24151/2409-1073-2018-2-154-162

Развитие понятия *вектор* в задачах физики и его формализация в математике

А. И. Литвинов

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Россия

tahalus@rambler.ru

Показано, как возникло понятие *вектор* и как оно развивалось, превращаясь в многоцелевой инструмент, который эффективно используется и в физике, и в геометрии, и в алгебре. Представленный в статье процесс развития понятия *вектор* выразительно иллюстрирует появление первичных (примитивных) штрихов понятия, которые направленно совершенствовались, так как оказались востребованными при решении задач физики. Применение свойственных математике приемов обобщений позволило расширить возможности понятия *вектор* до такой степени, что векторы приобрели свойства многоцелевого инструмента, продуктивно используемого для решения многих практических и теоретических задач.

Ключевые слова: интерактивный процесс обучения; первичный штрих вектора; направленный отрезок; вектор для физики; вектор для геометрии; вектор для алгебры.

Development of *Vector* Concept in Problems of Physics and its Formalization in Mathematics

A. I. Litvinov

National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia

tahalus@rambler.ru

The author shows the *vector* concept arising and development, its transformation into multi-purpose tool effectively used in physics, geometry and algebra. The *vector* concept development process presented in the paper illustrates the arising of elementary (primitive) traits of this concept that were improved directionally because of their relevance in physics problem solving. The appliance of extension methods proper to mathematics enabled to expand the capabilities of *vector* concept to the extent that vectors acquired the properties of versatile tool productively used for many practical and theoretical problems solving.

Keywords: interactive learning; vector's elementary trait; directed line segment; vector for physics; vector for geometry; vector for algebra.

Преимущества интерактивного процесса обучения давно признаны российской педагогикой. По нашему убеждению, процесс обучения становится интерактивным лишь тогда, когда его участники активно взаимодействуют и совместно творят знание [1, с. 140].

Нами разработан сценарий лекции-беседы, в которой объектом изучения избран вектор.

Появление первичного штриха понятия *вектор*. Первичный штрих вектора проявился в сознании человека не в результате специальных теоретических исследований, а как зрительный образ.

Представим себе сценку. Сидят два первобытных человека (пусть это Коля и Вася) у своей пещеры, не спеша и беззаботно беседуют. Вдруг Коля обращает взгляд в сторону растущего недалеко от пещеры дерева (акация, точка A) и произносит: «Кукушка прилетела, на ветку уселась и на нас поглядывает. Увидел?» Дальше беседа продолжилась. Через некоторое время Вася воскликнул: «Смотри, а кукушка уже на другом дереве (верба, точка B) пристроилась. Видишь?» — «Увидел!» После этого Коля слегка задумался и говорит: «Когда-нибудь физики назовут отрезок, исходящий из точки A в точку B, *направленным отрезком AB* и будут обозначать его $\overline{AB}$».

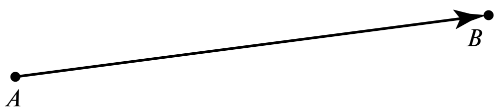

Рис. 1. Направленный отрезок

Далее Коля продолжил: «Если кукушка вздумает перелететь на третье дерево (дуб, точка D), то весь путь ее полета можно назвать: $\overline{AB} + \overline{BD}$». После этого Вася пробормотал: «Значит, если кукушка с акации сразу полетит на дуб, то это будет $\overline{AD}$. Но тогда $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$. Разве это одно и то же?»

Развитие первичного штриха понятия *вектор* при наблюдении движения точки: задача кинематики. Для исследования движения точки физики выбрали на местности тропинку, часто посещаемую велосипедистами. Назвали тропинку траекторией движения точки (велосипедиста) и отметили на ней столбиками точки: M_1, M_2, ..., M_n.

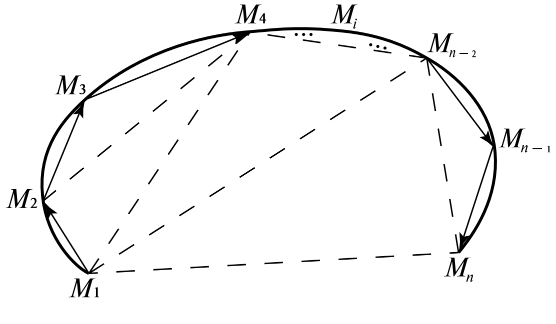

Рис. 2. Траектория движения точки

Совокупность точек траектории определяет совокупность направленных отрезков: $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, ..., $\overline{M_{n-1}M_n}$, которые физики называют *перемещениями*. Известно (аксиома геометрии), что каждый отрезок имеет определенную *длину:* однозначно определенное положительное число, если для измерения длины каждого отрезка выбрали одну и ту же единицу длины. Договорились длину направленного отрезка $\overline{M_iM_j}$ обозначать в виде: $\left|\overline{M_iM_j}\right|$ — абсолютная величина отрезка $\overline{M_iM_j}$. Из этого следует, что, имея выделенные на исследуемой траектории точки, можно измерить длины всех отрезков-перемещений: $\left|\overline{M_1M_2}\right|$, $\left|\overline{M_2M_3}\right|$, ..., $\left|\overline{M_{n-1}M_n}\right|$. Как только велосипедист проезжает мимо столбика M_i, наблюдатель отмечает время проезда t_i и записывает его в журнал наблюдений. Ломаная линия, образованная цепочкой перемещений $\left|\overline{M_1M_2}\right|$, $\left|\overline{M_2M_3}\right|$, ..., $\left|\overline{M_{n-1}M_n}\right|$, есть приближенное изображение истинной траектории движения тела. Используя совокупность перемещений, наблюдаемое движение велосипедиста для каждого перемещения $\overline{M_iM_{i+1}}$ оценивают величиной средней скорости:

$$v_i = \frac{\left|\overline{M_iM_{i+1}}\right|}{\Delta t_i},$$

где $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ есть время, затраченное на перемещение $\overline{M_iM_{i+1}}$, $i = 1, 2, ..., (n - 2)$. Направление средней скорости на перемещении $\overline{M_iM_{i+1}}$ совпадает с направлением этого перемещения. Это значит, что можно записать: $\overline{M_iM_j} = \overline{v_i} \cdot \Delta t_i$, где средняя скорость определена как направленный отрезок $\overline{v_i}$; верно также: $\overline{v_i} = \frac{1}{\Delta t_i} \cdot \overline{M_iM_{i+1}}$. В этих выражениях мы наблюдаем операцию умножения одного направленного отрезка на число для получения другого направленного отрезка.

Используя направленные отрезки, образуемые точками траектории, заметили их совокупное свойство: $\overline{M_iM_{i+1}} + \overline{M_{i+1}M_{i+2}} = \overline{M_iM_{i+2}}$ — для каждой пары *соседних* перемещений. Используя это свойство, запишем для первой пары: $\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} = \overline{M_1M_3}$, а также для последней пары: $\overline{M_{n-2}M_{n-1}} + \overline{M_{n-1}M_n} = \overline{M_{n-2}M_n}$.

Если сложить все направленные отрезки, образуемые точками траектории, получим полную цепочку перемещений:

$\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \ldots + \overline{M_{n-1}M_n} = \overline{M_1M_n}$. Нетрудно заметить, что из полной цепочки перемещений можно выделять частичные цепочки, в которых используются *только соседние* перемещения.

Итак, мы обнаружили определяющее свойство записи суммы перемещений: каждое слагаемое произвольной суммы перемещений, начиная со второго и заканчивая предпоследним, имеет слева и справа соседние перемещения траектории.

Рассмотрим первую пару перемещений. Равенство $\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} = \overline{M_1M_3}$ означает, что, имея начальную точку M_1 наблюдаемого движения, можно определить положение точки M_3 при помощи либо суммы перемещений $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ либо перемещения $\overline{M_1M_3}$. Обозначим $\overline{a} = \overline{M_1M_2}$, $\overline{b} = \overline{M_2M_3}$, $\overline{c} = \overline{M_1M_3}$. Тогда равенство $\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} = \overline{M_1M_3}$, т. е. равенство $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$, может быть отображено в виде треугольника (рис. 3). В соответствии с рисунком такое представление суммы перемещений $\overline{a}$ и $\overline{b}$ назвали *правилом треугольника*.

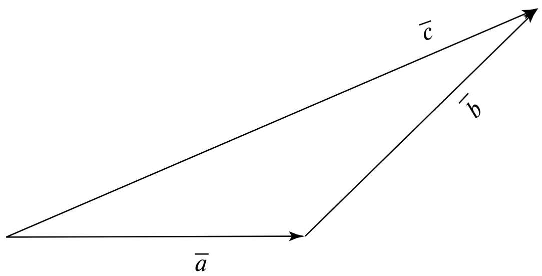

Рис. 3. Иллюстрация правила треугольника

Если вместо векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ использовать вектор $\overline{c}$, то приближенная траектория движения наблюдаемой точки будет отличаться от истинной еще больше и оценка средней скорости на участке M_1M_3 будет более грубой. Для нас это неважно: первичное назначение перемещений — изображать точки траектории для наблюдаемого движения тела.

Рассмотрим первые три перемещения. Обозначим: $\overline{a} = \overline{M_1M_2}$, $\overline{b} = \overline{M_2M_3}$, $\overline{c} = \overline{M_3M_4}$, $\overline{n} = \overline{M_1M_3}$, $\overline{m} = \overline{M_2M_4}$. Запишем сумму: $\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \overline{M_3M_4} = \overline{M_1M_4}$, или (используя обозначения) в виде: $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{M_1M_4}$. Представим эту сумму в виде рисунка. Нетрудно заметить, что для суммы перемещений выполняется *сочетательное* свойство (рис. 4).

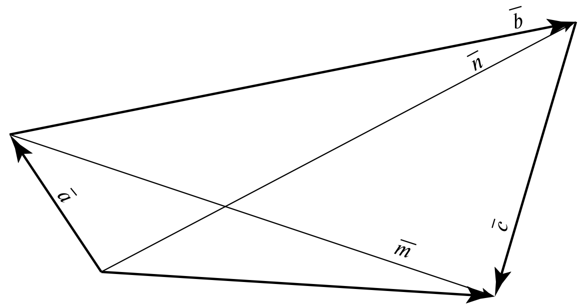

Рис. 4. Сочетательное свойство

Сделаем выводы.

Во-первых, имея совокупность перемещений, отображающих наблюдаемую траекторию движения точки, при записи суммы перемещений следует учитывать ограничение: использовать только соседние перемещения.

Во-вторых, в рассмотренной задаче для нахождения суммы нескольких перемещений несколько раз применяют правило треугольника. Выполняется сочетательное свойство.

В-третьих, допускается операция умножения одного направленного отрезка на число для получения другого направленного отрезка.

Развитие первичного штриха понятия *вектор* при исследовании движения точки: задача динамики материальной точки. Пусть имеется некоторое тело массой m, размерами которого можно пренебречь. Такое тело называют материальной точкой, обозначим ее как O. Пусть к этой точке приложено несколько сил, в общем случае не принадлежащих одной плоскости. На рисунке 5 показаны три силы: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ — направленные отрезки с общим началом в точке O. В результате многочисленных наблюдений физики установили: если для двух сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ построить параллелограмм с началом в точке O, то диагональ как направленный отрезок будет *равнодействующей* этих сил.

Обозначим ее как $\overline{R_{1,2}}$. Это значит, движение материальной точки одинаково и при воздействии сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, и при воздействии их равнодействующей $\overline{R_{1,2}}$.

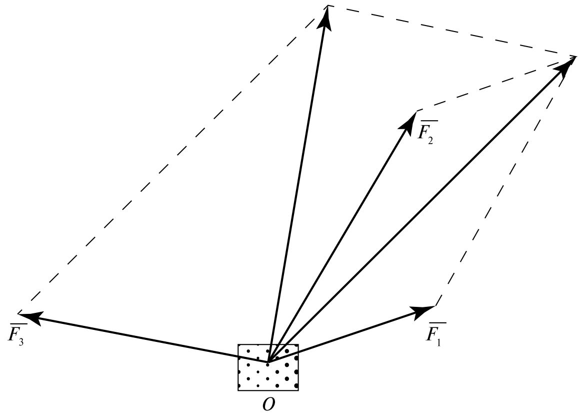

Рис. 5. Равнодействующая сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$

Если построить параллелограмм, используя направленные отрезки $\overline{F_3}$ и $\overline{R_{1,2}}$, то получим равнодействующую трех сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$. Обозначим ее как $\overline{R_{1,2,3}} = \overline{R}$ (на рисунке для простоты показан направленный отрезок без обозначения). Используя равнодействующую $\overline{R}$, можно записать формулу Ньютона в виде: $\overline{R} = \overline{a} \cdot m$, где $\overline{a}$ — ускорение материальной точки, определено как направленный отрезок. Это значит, что верно также выражение: $\overline{a} = \frac{1}{m} \cdot \overline{R}$. Вновь мы наблюдаем операцию умножения одного направленного отрезка на число для получения другого направленного отрезка.

Итак, при исследовании динамики движения материальной точки под действием нескольких сил требуется вычисление равнодействующей этих сил. Для нахождения равнодействующей сил требуется применить правило сложения направленных отрезков. Это правило назвали *правилом параллелограмма*. Если на материальную точку действуют *n* сил, для нахождения равнодействующей потребуется построить $(n - 1)$ параллелограмм.

Обозначим (для удобства использования): $\overline{a} = \overline{F_1}$, $\overline{b} = \overline{F_2}$, $\overline{c} = \overline{R_{1,2}}$. Тогда равенство $\overline{F_1} + \overline{F_2} = \overline{R_{1,2}}$, т. е. равенство $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$, может быть отображено в виде параллелограмма (рис. 6).

Из рисунка следует: сумма направленных отрезков $\overline{a}$, $\overline{b}$ обладает переместительным свойством: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$. Из рисунка следует также, что для нахождения равнодействующей сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ можно использовать правило треугольника. Этих треугольников два: используем переместительное свойство суммы.

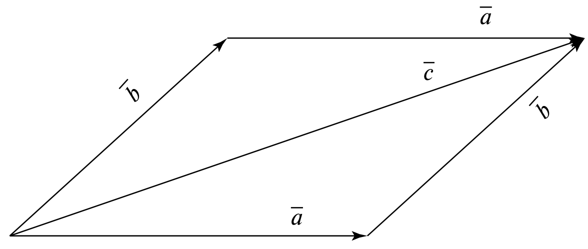

Рис. 6. Иллюстрация правила параллелограмма

Для построения каждого из треугольников требуется параллельный перенос или направленного отрезка $\overline{F_1}$, или направленного отрезка $\overline{F_2}$. В этом случае получаем одну и ту же равнодействующую $\overline{R_{1,2}}$ рассматриваемых сил, но разрушаем условие: все силы приложены к одной точке.

Сделаем выводы.

Во-первых, имея совокупность сил, действующих на материальную точку, обнаружили переместительное и сочетательное свойства суммы.

Во-вторых, использование правила треугольника для суммы двух сил нарушает физический смысл задачи, но не меняет равнодействующей.

В-третьих, применение правила параллелограмма для суммы двух перемещений, использующих точки наблюдаемой траектории движения, также возможно, но разрушает траекторию. Зато добавляет переместительное свойство суммы перемещений.

В-четвертых, допускается операция умножения одного направленного отрезка на число для получения другого направленного отрезка.

Развитие первичного штриха понятия *вектор* при исследовании движения свободного твердого тела. Обозначим центр масс твердого тела (размерами которого нельзя пренебречь) точкой *O*. Пусть на тело вдоль прямой линии *l* действует сила $\overline{F}$, точка приложения которой определена направленным отрезком $\overline{r}$ (показан на рисунке 7). Пусть через точку *O* проходит прямая линия l_2, параллельная *l*.

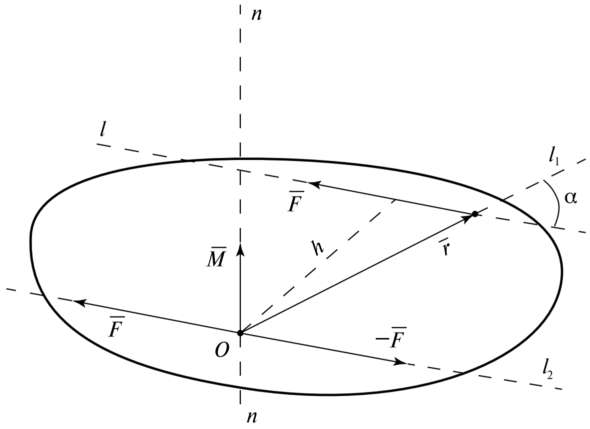

Рис. 7. Движение свободного твердого тела

Приложим к точке O две силы $\overline{F}$ и $-\overline{F}$ (их равнодействующая равна нулю). Теперь можем рассматривать отдельно две задачи: а) движение центра масс тела под действием силы $\overline{F}$, б) вращение тела относительно центра масс под действием вращательного момента, создаваемого парой сил ($\overline{F}$, $-\overline{F}$): сила $\overline{F}$ направлена вдоль прямой l, а сила $-\overline{F}$ вдоль прямой l_2.

Известно, что *абсолютная величина* вращательного момента M пары сил ($\overline{F}$, $-\overline{F}$) равна произведению плеча пары сил (на рисунке обозначено как h) на абсолютную величину силы $\overline{F}$ (т. е. на длину направленного отрезка $\overline{F}$). Вращательному моменту пары сил определили *направление,* т. е. изобразили в виде направленного отрезка $\overline{M}$. Отрезок $\overline{M}$ перпендикулярен плоскости, определяемой точкой O и прямой линией l (на рисунке отмечено линией n), а направление его таково, что с его конца наблюдается вращение тела против движения часовой стрелки. Заметим, направленный отрезок $\overline{F}$ порождает направленный отрезок $\overline{M}$, с учетом законов движения физики (механики).

Пусть на тело действует несколько сил: $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, причем их линии действия различны (и не принадлежат одной плоскости). Тогда их равнодействующая: $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$ приложена к точке O, т. е. действует на центр масс тела и определяет направление его движения. Каждая из этих сил порождает пару сил и соответствующие им моменты: $\overline{M_1}$, $\overline{M_2}$, $\overline{M_3}$. Равнодействующая $\overline{M}$ этих моментов как направленный отрезок определяется суммой: $\overline{M} = \overline{M_1} + \overline{M_2} + \overline{M_3}$. Момент $\overline{M}$ вращает тело относительно точки O. Равнодействующие $\overline{R}$ и $\overline{M}$ находят, применяя правило параллелограмма.

Заметим особенность использования совокупности сил: $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, ..., $\overline{F_n}$ при исследовании движения свободного твердого тела. Для нахождения равнодействующей заданных сил $\overline{R}$ *применяем параллельный перенос* направленных отрезков-сил, совмещая их начальные точки с точкой O. Сила $\overline{R}$ определяет движение центра масс тела. Для сохранения физического смысла воздействия совокупности сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, ..., $\overline{F_n}$ на тело создаем совокупность направленных отрезков-моментов: $\overline{M_1}$, $\overline{M_2}$, ..., $\overline{M_n}$ (с общим началом в точке O), равнодействующая которых (сумма) $\overline{M}$ определяет вращательное движение тела вокруг точки O. При нахождении равнодействующих $\overline{R}$ и $\overline{M}$ применяем *правило параллелограмма.*

Сделаем выводы.

Во-первых, закон движения свободного твердого тела, на которое действует совокупность сил, определяет нахождение равнодействующих $\overline{R}$ и $\overline{M}$ как направленных отрезков применением правила параллелограмма.

Во-вторых, используемые суммы $\overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_n}$ и $\overline{M_1} + \overline{M_2} + ... + \overline{M_n}$ обладают переместительным свойством. Сочетательное свойство этих сумм определяется законами физики.

В-третьих, использование правила треугольника для суммы двух сил нарушает физический смысл задачи, но результат нахождения равнодействующих $\overline{R}$ и $\overline{M}$ такой же, как и при использовании правила параллелограмма.

Учитывая рассмотренные примеры, использующие совокупность направленных отрезков, математики предложили обобщения, которые позволили создать универсальный инструмент.

Определение понятия *геометрический вектор* как обобщение рассмотренных в примерах свойств направленных отрезков. *Первое обобщение.* Пусть дано множество R, элементами которого являются направленные отрезки: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, ... Элементы этого множества называются *векторами,* а множество R — линейным векторным пространством, если для множества элементов R *определены линейные операции сложения и умножения на действительное число.* Математики предложили простой путь снятия противоречия между правилами треугольника и параллелограмма: считать, что *вектор не меняется при параллельном переносе (является свободным),* т. е. в определении вектора существенными остаются *направление* вектора и его *длина*. Это значит, что если векторы $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{CD} = \bar{b}$ можно совместить параллельным переносом, то считаем их равными: $\bar{a} = \bar{b}$.

Операция сложения: каждой паре элементов $\bar{a}$, $\bar{b} \in R$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $(\bar{a} + \bar{b}) \in R$, называемый *суммой*. Сумма должна обладать некоторыми свойствами:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \text{ —} \tag{1}$$

переместительное свойство: сложение *коммутативно*.

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \text{ —} \tag{2}$$

сочетательное свойство: сложение *ассоциативно*.

Множество R содержит элемент $\overline{O} = 0$, обладающий свойством:

$$\bar{a} + 0 = \bar{a}, \tag{3}$$

где $\bar{a}$ — любой элемент множества R. Этот элемент называют *нулевым*. Легко доказать единственность элемента 0.

Для каждого элемента $\bar{a}$ множества R существует элемент $-\bar{a}$, удовлетворяющий условию:

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = 0. \tag{4}$$

Говорят, что элемент $-\bar{a}$ — *противоположный* для элемента $\bar{a}$. Легко доказать единственность элемента $-\bar{a}$.

Используя аксиомы (1) ÷ (4), нетрудно определить *разность* векторов $\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$. Элемент $\bar{c}$ обладает свойством: $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$, что легко видеть на рисунке 8. Если вспомнить правило параллелограмма при сложении векторов, нетрудно заметить, что разность векторов определяет вторую диагональ параллелограмма, определяемого векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$. Если для вектора $\bar{b}$ определить вектор $-\bar{b}$, то разность векторов можно заменить суммой: $\bar{a} + (-\bar{b}) = \bar{c}$, как показано на рисунке.

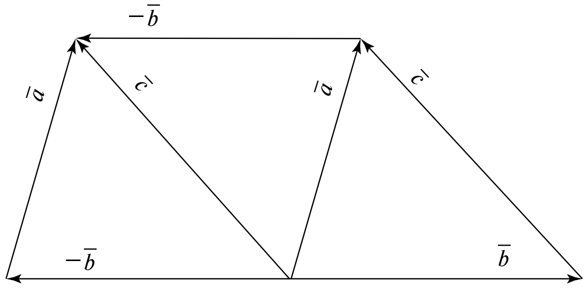

Рис. 8. Сложение векторов с использованием противоположного вектора

Операция умножения на действительное число λ: каждой паре *элемент $\bar{a}$, число* λ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $\bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a}) \in R$. Операция умножения элемента множества R на число должна обладать свойствами:

$$\alpha \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \cdot \bar{a} + \alpha \cdot \bar{b}, \tag{5}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \bar{a} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{a}, \tag{6}$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{a}), \tag{7}$$

$$1 \cdot \bar{a} = \bar{a}. \tag{8}$$

Из определения линейных операций с векторами следует, что *для любого вектора* $\bar{c}$ векторного пространства R *можно найти* такие векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, что $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$. Учитывая это замечание, построим *аналитическую модель* геометрического вектора в 3-мерном пространстве.

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана точка A, ее координаты отметим скобкой (a_x, a_y, a_z).

Определим также 3-мерное векторное пространство R, задав его базис единичными векторами i, j, k: вектор i отмечает направление оси OX, вектор j — направление оси OY, вектор k — направление оси OZ. На рисунке 9 векторы i, j, k имеют общее начало в точке O.

В пространстве R построим вектор $\overline{OA}$: его начальная точка — O, а конечная — A. Вектор $\overline{OA}$ называют *радиус-вектором* точки A в заданном векторном пространстве R.

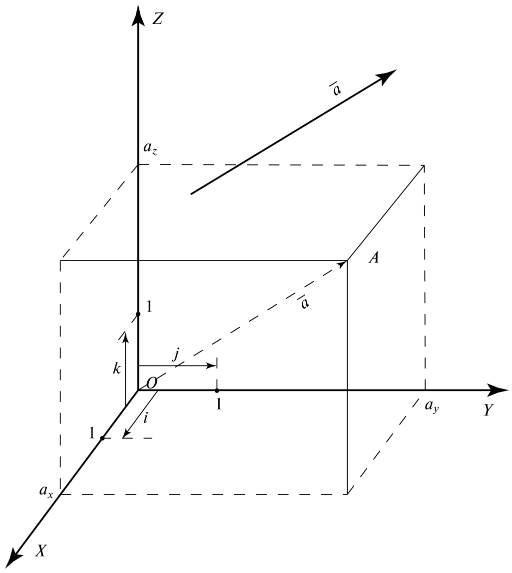

Рис. 9. Трехмерное пространство

Используя векторы i, j, k, запишем векторы: $\overline{a}_x = a_x \cdot i$, $\overline{a}_y = a_y \cdot j$, $\overline{a}_z = a_z \cdot k$. Тогда вектор $\overline{OA}$ можно записать в виде их линейной комбинации: $\overline{OA} = \overline{a}_x + \overline{a}_y + \overline{a}_z$, или в виде $\overline{OA} = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k$. Для удобства применяют также компактную запись $\overline{OA} = (a_x, a_y, a_z)$, или $\overline{OA} = A$.

В пространстве R *найдется* вектор $\overline{a}$, равный вектору $\overline{OA}$. Так как в векторном пространстве все векторы свободные, начало вектора $\overline{a}$ совместим с точкой O системы координат $OXYZ$. Тогда можем записать: $\overline{a} = \overline{OA} = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k = (a_x, a_y, a_z) = A$.

Пусть теперь вектор $\overline{a}$ — *произвольный* вектор пространства R. Параллельным переносом совместим его начало с точкой O. Тогда конечная точка вектора $\overline{a}$ будет определять некоторую точку пространства $OXYZ$, обозначим ее точкой A. В этом случае можем записать: $\overline{OA} = \overline{a} = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k = (a_x, a_y, a_z) = A$.

Итак, мы наблюдаем взаимно однозначное соответствие точек, заданных в системе координат $OXYZ$, и радиус-векторов векторного пространства R. Воспользуемся этим и (для удобства применения радиус-векторов) будем использовать равенство $\overline{OA} = A = (a_x, a_y, a_z)$.

Пусть в пространстве $OXYZ$ заданы точки: $A = (a_x, a_y, a_z)$, $B = (b_x, b_y, b_z)$. Это значит, что в пространстве R определены направленные отрезки:

$$\overline{OA} = \overline{a} = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k = (a_x, a_y, a_z);$$

$$\overline{OB} = \overline{b} = b_x \cdot i + b_y \cdot j + b_z \cdot k = (b_x, b_y, b_z).$$

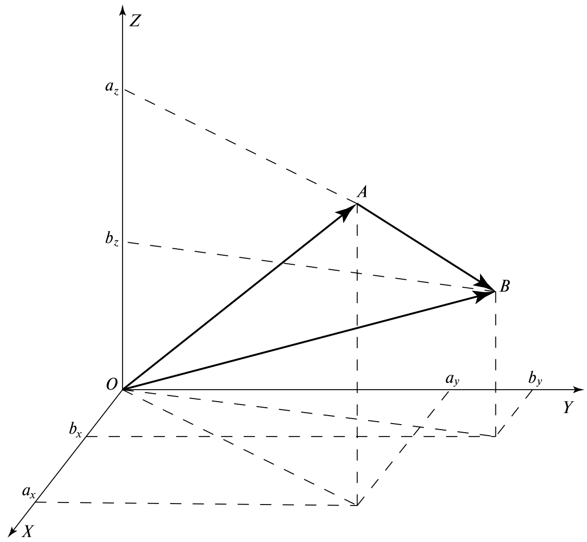

Рис. 10. Направленный отрезок $\overline{AB}$

Используя свойства суммы векторов пространства R, запишем:

$$\begin{gathered}\overline{OA} + \overline{OB} = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k + \\ + b_x \cdot i + b_y \cdot j + b_z \cdot k = \\ = (a_x + b_x) \cdot i + (a_y + b_y) \cdot j + \\ + (a_z + b_z) \cdot k = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z) = \\ = A + B.\end{gathered} \tag{9}$$

Это значит, что для вычисления суммы радиус-векторов их координаты складываются, т. е. складываются скобки координат точек.

$$\begin{gathered}\alpha \cdot \overline{OA} + \beta \cdot \overline{OB} = (\alpha \cdot a_x + \beta \cdot b_x) \cdot i + \\ + (\alpha \cdot a_y + \beta \cdot b_y) \cdot j + \\ + (\alpha \cdot a_z + \beta \cdot b_z) \cdot k = \\ = ((\alpha \cdot a_x + \beta \cdot b_x); (\alpha \cdot a_y + \beta \cdot b_y); \\ (\alpha \cdot a_z + \beta \cdot b_z)) = \alpha \cdot A + \beta \cdot B.\end{gathered} \tag{10}$$

Это значит, что для совокупности радиус-векторов выполняется операция умножения на число. Из выражений (9) и (10) следует, что множество точек с определенными для них линейными операциями составляют линейное векторное пространство R.

$$\begin{gathered}\overline{OA} - \overline{OB} = a_x \cdot i + a_y \cdot j + \\ + a_z \cdot k - b_x \cdot i - b_y \cdot j - b_z \cdot k = \\ = (a_x - b_x) \cdot i + (a_y - b_y) \cdot j + (a_z - b_z) \cdot k = \\ = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z) = A - B.\end{gathered} \tag{11}$$

Это значит, что для нахождения разности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ их координаты вычитаются.

Учитывая рисунок 10, запишем равенство: $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$. Из этого равенства следует: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Учитывая взаимно однозначное соответствие точек, заданных в системе координат $OXYZ$, и радиус-векторов векторного пространства R, запишем: $\overline{AB} = B - A$, или в координатной форме:

$$\overline{AB} = (b_x - a_x;\ b_y - a_y;\ b_z - a_z).$$

Свойства рассмотренных нами множеств R направленных отрезков выполняются в любой аффинной системе координат. Мы будем применять только прямоугольные системы координат и на плоскости, и в пространстве. Тогда для вычисления длины направленного отрезка $\overline{AB}$ используется формула:

$$l_{AB} = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + \left(b_y - a_y\right)^2 + (b_z - a_z)^2}.$$

Сделаем выводы.

Во-первых, множество направленных отрезков радиус-векторов 3-мерного пространства $OXYZ$ является векторным пространством.

Во-вторых, полученные соотношения выделяют аналитические модели векторов 3-мерного пространства в виде скобок, использующих совокупность трех чисел. Для двумерного пространства скобки используют два числа, для одномерного пространства — одно число.

Определение понятия *алгебраический вектор* как обобщение понятия *геометрический вектор*. Рассматривая геометрический вектор на числовой оси OX, получили его числовую модель в виде скобки, содержащей одно число: (a_x). На плоскости OXY числовая модель геометрического вектора — скобка, содержащая два числа $(a_x,\ a_y)$. В пространстве $OXYZ$ числовая модель геометрического вектора — скобка, содержащая три числа (a_x, a_y, a_z).

Обобщая использование числовых скобок, полученных в качестве числовых моделей геометрических векторов, в алгебре определили в качестве векторов скобки $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, содержащие n чисел. Для таких скобок определили линейные операции суммы и умножения на число. Пространство, содержащее такие скобки, назвали n-мерным линейным векторным пространством R_n.

Максимально возможное обобщение понятия «вектор». Пусть дано множество R, элементами которого являются: $a, b, c, \ldots$ Элементы этого множества называются векторами, а множество R — линейным векторным пространством, если для множества элементов R *определены линейные операции сложения и умножения на действительное число.*

В этом случае в аксиомах (1) ÷ (8) достаточно заменить символы, обозначающие направленные отрезки: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, ..., символами: $a, b, c, \ldots$

В качестве иллюстрации возможностей такого обобщения рассмотрим два примера определения линейного векторного пространства.

Пример 1. Пусть задано множество непрерывных на отрезке D (область определения) функций. Известно, что функция, полученная как сумма непрерывных функций, есть непрерывная функция. Функция, полученная умножением непрерывной функции на действительное число, есть непрерывная функция. Это значит, что заданное множество функций есть линейное векторное пространство.

Пример 2. Пусть задано множество матриц (прямоугольных таблиц чисел) размерностью $(m,\ n)$, т. е. имеющих m строк и n столбцов. Для матриц определены линейные операции сложения и умножения на число. В результате применения линейных операций получаем матрицу той же размерности $(m,\ n)$. Это значит, что заданное множество матриц есть линейное векторное пространство.

Таким образом, на протяжении лекции-беседы ее участники наблюдали, как понятие *вектор* появилось в сознании людей благодаря физикам, как математики применили к нему формализацию и обобщения, в результате чего был создан многоцелевой инструмент для исследователей-практиков. Использование этого инструмента в практике различных наук побуждает к дальнейшему развитию понятия *вектор.*

Литература

1. ***Литвинов А. И.*** Вектор — многоликий инструмент, раскрывающий изящества интерактивного изучения математики и любой науки // Вторые Всероссийские Декартовские чтения «Декартовский рационализм и современная наука»: мат-лы науч.-практ. конф. (Зеленоград, 17 апреля 2015 г.). М.: МИЭТ, 2015. С. 140—158.
2. ***Литвинов А. И.*** Вектор как инструмент интерактивного изучения любой науки // Экономические и социально-гуманитарные исследования. 2015. № 2 (6). С. 150—151.

Поступила 29.03.2018

Литвинов Александр Иванович — кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики № 2 Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, д. 1), *tahalus@rambler.ru*

References

1. Litvinov A. I. Vektor — mnogolikii instrument, raskryvayushchii izyashchestva interaktivnogo izucheniya matematiki i lyuboi nauki (Vector is Many-Faced Tool Uncovering the Elegances of Interactive Learning of Mathematics and Any Science), *Vtorye Vserossiiskie Dekartovskie chteniya "Dekartovskii ratsionalizm i sovremennaya nauka", mat-ly nauch.-prakt. konf. (Zelenograd, 17 aprelya 2015 g.),* M., MIET, 2015, pp. 140—158.
2. Litvinov A. I. Vektor kak instrument interaktivnogo izucheniya lyuboi nauki (Vector as Versatile Interactive Learning Tool), *Ekonomicheskie i sotsial'no-gumanitarnye issledovaniya,* 2015, No. 2 (6), pp. 150—151.

Submitted 29.03.2018

Litvinov Aleksandr I., Candidate of Engineering Sciences, associate professor of Higher Mathematics Department No. 2, National Research University of Electronic Technology (1, Shokin sq., Zelenograd, 124498, Moscow, Russia), *tahalus@rambler.ru*